

О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ УМНОЖЕНИЯ

Селиверстова И.Ф.¹ (кандидат физико-математических наук)

¹*Красноярский институт железнодорожного транспорта – филиал ФГБОУ ВО ИРГУПС*

Аннотация

В статье предлагаются способы вычисления произведений, в которых первый сомножитель состоит из различного количества девяток, а второй – из произвольных цифр. В статье приводится дополнение к ранее проведенным исследованиям аналогичных произведений. Наибольший интерес из этих случаев представляют два последних указанных метода. Они позволяют быстро находить ответы произведений для случаев $n_1 \geq n_2$ и $n_1 < n_2$ (где n_1 – количество периодических цифр – девяток – в первом сомножителе, а n_2 – количество произвольных цифр во втором сомножителе).

Рассмотрены так же варианты нахождения произведений при различном количестве однородных цифр первого сомножителя на двучлен, трехчлен, четырехчлен, если известен результат умножения какого-либо одного из них. Для нахождения необходимых ответов применяются различные способы, как в направлении увеличения n_1 , так и при его уменьшении. Методы нахождения таких произведений по ответу одного из них рассматривались также в случае, когда первые сомножители состояли из произвольных однородных цифр. Результаты могут использоваться в торговых, производственных и других вычислительных операциях, а также будут полезны всем, кто интересуется занимательной арифметикой и различными приемами быстрого счета.

Ключевые слова: виртуальная часть, способы умножения, произведение

ON SOME WAYS OF MULTIPLICATION

Seliverstova I.F.¹ (candidate of Physical and Mathematical Sciences)

¹*Krasnoyarsk Institute of railway transport – branch of FGBOU VO IrGUPS*

Annotation

The article proposes methods for calculating products in which the first factor consists of a different number of nines, and the second one consists of arbitrary digits. The article provides an addition to previous studies of similar works. Of these cases, the last two methods mentioned are of greatest interest. They allow you to quickly find answers to products for cases $n_1 \geq n_2$ and $n_1 < n_2$ (where n_1 is the number of periodic digits - nines - in the first factor, and n_2 is the number of arbitrary digits in the second factor).

Also considered are options for finding products with a different number of homogeneous digits of the first factor by a binomial, trinomial, quadruple, if the result of multiplying any one of them is known. To find the necessary answers, various methods are used, both in the direction of increasing n_1 and decreasing n_1 . Methods for finding such products from the answer of one of them were also considered in the case when the first factors consisted of arbitrary homogeneous digits. The results can be used in trading, manufacturing and other computational operations, and will also be useful to anyone who is interested in entertaining arithmetic and various quick counting techniques.

Keywords: virtual part, multiplication methods, product

Введение

В работе проводится обзор способов умножения, с дополнениями, произведений двух сомножителей, первый из которых состоит из однородных цифр, главным образом, девяток в произвольном количестве, как наиболее удобных для выполнения торговых и других расчетов. Второй сомножитель при этом может состоять из различного количества произвольных цифр. Девяткой можно воспользоваться и в случаях, когда первый сомножитель состоит из других однородных цифр.

Цель работы

Целью работы является определение вариантов более простых способов нахождения ответов указанных произведений первых сомножителей на двучлены, трехчлены и так далее, и некоторых других вариантов произведений.

Результаты исследований и их обсуждение

Напомним структуру произведений, изложенную в [1-2]. Количество цифр первого сомножителя обозначим n_1 , второго n_2 . Ответ произведения, в общем случае, состоит из трех частей: 1-ой (начальной), 2-ой (средней), 3-ей (последней). Наиболее консервативная 3-я часть ответа; в 1-ой при определённых обстоятельствах может измениться последняя цифра. Первая и третья части ответа состоят из одинакового количества цифр, равного их количеству в наименьшем из сомножителей. Средняя, т.е. 2-ая часть, наиболее вариабельная. Она состоит из периодических цифр в количестве $\Delta = n_1 - n_2$, при $n_1 \geq n_2$ или из периодических цифр в количестве Δ , последняя цифра из которых на единицу меньше (т.е. имеет место сбой в ответе). В этом случае последняя цифра первой части ответа увеличивается на единицу.

Замечание 1. Общее количество цифр в ответе равно сумме их в обоих сомножителях.

Замечание 2. Если цифры 1-го сомножителя состоят из девяток, то средняя часть ответа состоит только из периодических девяток в количестве равным $\Delta (n_1 \geq n_2)$. Случаи, когда $n_1 < n_2$ рассмотрены по ходу применения их в работе [2].

Особенностью ответа всех произведений ($n_1 \geq n_2$) является равенство суммы величин 1-ой и 3-ей частей их средней части ответа, состоящей из такого же количества цифр, если даже их нет в реальном ответе. В этом случае 2-ую часть называют **средним числом**. Если известны две какие-либо части ответа, всегда можно найти 3-ью. Периодическое число 2-ой части, может быть найдено независимо от 1-ой и 3-ей частей ответа, путем сведения к “простому” (коренному, одной цифре) числу произведения суммы цифр 2-го сомножителя на цифру 1-го. Если средняя часть ответа, состоящая из этих периодических чисел в количестве равном 1-ой или 3-ей части, окажется меньше какой-либо из них, то в ответе имеем сбой.

[1] Приведем методы умножения первых сомножителей, составленных из девяток.

1. Общий универсальный метод для всех разновидностей n_1 и n_2 , использующий таблицу умножения [1].

2. Метод “зануления” девяток (общеизвестный, [1]). Пример: $9999 \cdot 843 = 8429157$. Получаем: а) $843 \cdot 10000 = 8430000$; б) $8430000 - 843 = 8429157$.

Здесь 842 – 1-ая часть ответа, 9 – 2-ая часть, а второе **число** средней части 999; 3-я часть – 157. Все – 1-ая, 3-я части и 2-ое число (виртуальная, [3]) – трехчлены, т.к. $n_2 = 3$, ($n_2 < n_1$). Вторая часть – 9, т.к. $\Delta = n_1 - n_2 = 1$.

3. Пример: $9999 \cdot 843 = ?$

Метод произведения соответствующих цифр обоих сомножителей (метод “скобок” – 1, [2]). Перемножая, получим: $(9 \cdot 8)(9 \cdot 4)(9 \cdot 3) \rightarrow (72)(36)(27)$. Затем справа налево суммируем соседние цифры скобок в количествах 1, 3, 5, а затем т.к. $\Delta = 1$, суммируем один раз все цифры, а далее слева направо в количествах 5, 3, 1 (аналогично поступаем в подобных случаях в дальнейшем).

1) $\boxed{7}$; 2) $7 + 2 + 6 = 15 \rightarrow \boxed{5} \textcircled{1}$; 3) $7 + 2 + 6 + 3 + 2 + \textcircled{1} = 21 \rightarrow \boxed{1} \textcircled{2}$; 4) $7 + 2 + 6 + 3 + 2 + 7 + \textcircled{2} = 29 \rightarrow \boxed{9} \textcircled{2}$; 5) $7 + 2 + 3 + 6 + 2 + \textcircled{2} = 22 \rightarrow \boxed{2} \textcircled{2}$; 6) $7 + 2 + 3 + 2 = 14 \rightarrow \boxed{4} \textcircled{1}$; 7) $7 + \textcircled{1} = \boxed{8}$

С конца (в обратном порядке) записываем цифры в квадратах (здесь и далее). Получим $9999 \cdot 843 = 8429157$.

Замечание: индексы (цифры в кружочках) прибавляем к последующим суммам цифр (здесь и далее).

4. Метод пошагового суммирования (метод “скобок” – 2, $n_1 \geq n_2$). [2]

Примеры:

а) $9999 \cdot 74 = ?$

Перемножаем, смещая двучлен пошагово налево до совпадения первых цифр сомножителей следующим образом:

$(9 \cdot 7)[9 \cdot (7 + 4)][9(7 + 4)][9 \cdot (7 + 4)](9 \cdot 4) \rightarrow (63)(99)(99)(99)(36)$ – пошагово суммируем справа налево, получаем: 1) $\boxed{6}$; 2) $3 + 9 = 12 \rightarrow \boxed{2} \textcircled{1}$; 3) $9 + 9 + \textcircled{1} = 19 \rightarrow \boxed{9} \textcircled{1}$; 4) $9 + 9 + \textcircled{1} = 19 \rightarrow \boxed{9} \textcircled{1}$; 5) $9 + 9 + \textcircled{1} = 13 \rightarrow \boxed{3} \textcircled{1}$; 6) $6 + \textcircled{1} = \boxed{7}$

Ответ: $9999 \cdot 74 = 739926$.

б) $999 \cdot 328 = ?$

$(9 \cdot 3)[9(3 + 2)][9(3 + 2 + 8)][9(2 + 8)](9 \cdot 8) \rightarrow (27)(45)(117)(90)(72) \rightarrow$ переходим к двучленам в каждой скобке, прибавляя сотни к десяткам предыдущей скобки $\rightarrow (27)(55)(17)(90)(72) \rightarrow$ пошагово суммируем справа налево, десятки каждой скобки с единицами соседней левой скобки $\rightarrow 327672$.

Ответ: $999 \cdot 328 = 327672$.

5. Умножение “столбиком” ($n_1 \geq n_2$), [2]. Примеры:

а) $9999 \cdot 175 = ?$

Сначала записываем произведения крайних цифр сомножителей (в виде двучленов), затем суммы цифр крайних двучленов, второго сомножителя умноженные на 9, и складываем их следующим образом:

$$\begin{array}{r} 0 \ 9 \\ + \quad 7 \ 2 \\ \hline 1 \ 6 \ 2 \end{array} \text{ и } \begin{array}{r} 4 \ 5 \\ + 1 \ 0 \ 8 \\ \hline 1 \ 1 \ 2 \ 5 \end{array}, \text{ где } \begin{array}{l} 72 = 9(1 + 7), \\ 108 = 9(7 + 5). \end{array}$$

Т.к. количество цифр в каждой части равно $3 = n_2$, то старшая цифра второй суммы (единица) прибавляется к единицам первой. Получаем 163 и 125 – 1-ая и 3-я части произведения, затем произведение $(1 + 7 + 5)9 = 117$ располагаем между трехчленами 1-ой и 3-ей части и распределяем 117 между ними:

$$\begin{array}{r} 163 \ (117) \ 125 \\ 174 \quad \quad 825 \end{array}, \text{ где } \begin{array}{l} 174 = 163 + 11 \\ 825 = (7 + 1)25 \end{array}$$

т.е. единицы прибавляем к старшему разряду правой части ответа (3-ей), а остальные цифры (11) к соответствующим разрядам первой части. Но в примере $\Delta = 1$, следовательно, существует средняя часть ответа в виде одной цифры. В случае первого сомножителя, состоящего из девяток, вторая часть ответа – 9. Проверим: $9(1 + 7 + 5) = 9 \cdot 13 = 117 \rightarrow 1 + 1 + 7 = 9$. Итак, ответ: $9999 \cdot 175 = 1749825$.

б) $999 \cdot 328 = ?$

$$\begin{array}{r} 2 \ 7 \\ + \quad 4 \ 5 \\ \hline 3 \ 1 \ 5 \end{array} \ (117) \quad \begin{array}{r} 7 \ 2 \\ + 9 \ 0 \\ \hline 9 \ 7 \ 2 \end{array}, \text{ где } \begin{array}{l} 45 = (3 + 2)9, \\ 90 = (2 + 8)9, \\ 117 = (3 + 2 + 8)9. \end{array} \quad \text{далее } + \begin{array}{r} 3 \ 1 \ 5 \\ + \quad 1 \ 1 \\ \hline 3 \ 2 \ 6 \end{array} + \begin{array}{r} 9 \ 7 \ 2 \\ + \quad 7 \\ \hline 16 \ 7 \ 2 \end{array}$$

$\Delta = 0$, средней части нет. Ответ: $999 \cdot 328 = 327672$.

6. Самый простой способ умножения первого сомножителя, состоящего из девяток на произвольный второй сомножитель для случая $n_1 \geq n_2$, [2].

Суть способа: сразу записываем части ответа, первая часть – это второй сомножитель, уменьшенный на единицу, третья часть – разность между второй (виртуальной) частью, состоящей из девяток в количестве n_2 и первой частью ответа. Вторая часть ответа состоит из девяток в количестве $\Delta = n_1 - n_2$.

Пример: $99999 \cdot 768 = ?$. Ответ: $99999 \cdot 768 = 76799232$, где $767 = 768 - 1$ – первая часть ответа, $232 = 999 - 767$ – третья часть ответа, $\Delta = 2$, следовательно, средняя часть ответа 99.

Замечание: для случая $n_1 < n_2$, первая и третья часть ответа находятся несколько иначе. Первая и третья часть ответа по количеству цифр равны n_1 , только первая часть – это первые числа второго сомножителя, причем последняя цифра на единицу меньше. Третья часть – это разность между числом, состоящим из девяток в количестве n_1 и количеством последних цифр второго сомножителя, уменьшенных на единицу. Между ними располагается средняя часть ответа. Она находится как сумма последних цифр второго сомножителя в количестве Δ и разности между числом девяток и первых цифр второго сомножителя.

Рассмотрим на примере ($n_1 < n_2$): $999 \cdot 7398 = ?$

$738 = 739 - 1$ – первая часть ответа, $999 - 397 = 602$ – третья часть ответа, так как $n_1 = 3$. Средняя часть: $8 + (9 - 7) = 10$, так как $\Delta = 1$. Получим $738(10)602 \rightarrow 7390602$, так как $n_1 + n_2 = 7$. Итак, ответ: $999 \cdot 7398 = 7390602$.

7. Добавим еще один способ умножения первого сомножителя, состоящего из девяток на любой второй сомножитель для случая $n_1 \geq n_2$ и $n_1 < n_2$. Это способ “разделения на десятки и единицы”.

В этом случае каждую цифру второго сомножителя умножаем на 9 и записываем последовательно десятки произведения слева, а соответствующие единицы справа. Затем при $\Delta = 0$ от каждой цифры правой части (единиц), кроме последней, отнимается единица и прибавляется к советующим десяткам левой части (кроме последней цифры десятков).

Примеры ($n_1 \geq n_2$):

а) $9999 \cdot 3615 = ?$

1) 2504 – десятки, 7495 – единицы;

2) $(2+1)(5+1)(0+1)4(7-1)(4-1)(9-1)5 \rightarrow 36146385$, $\Delta = 0$, следовательно, средней части в ответе нет. Итак, ответ: $9999 \cdot 3615 = 36146385$.

б) $99999 \cdot 78 = ?$ Найдем первую и третью части ответа

67 32 ($7 \cdot 9 = 63$,
 $8 \cdot 9 = 72$)

Последние цифры произведения 7 и 2 – неизменны, а первые 6 и 3 изменяются на единицу: первая (десятки) увеличивается, вторая (единицы) – уменьшается. Получаем 77 22. Так как $n_2 = 2$, где 77 – первая часть ответа, а 22 – третья. Вторая часть ответа состоит из девяток в количестве $\Delta = n_1 - n_2 = 3$, т.е. равна 999. Итак, ответ: $9999 \cdot 78 = 7799922$.

Случаи, когда $n_1 < n_2$. В этом случае первая и третья части ответов – крайние цифры у десятков (слева) и единиц (справа) соответственно. Каждая из них содержит количество цифр, равное их количеству в меньшем сомножителе. Без изменения остаются последние цифры, остальные изменяются на единицу, как ранее указано. Средняя часть есть сумма оставшихся цифр в количестве, равном меньшему сомножителю.

Примеры:

а) $99 \cdot 1248 = ?$

Решение: перемножаем и разделяем соответствующие десятки и единицы. Получим 01[37 98]62. За квадратными скобками цифры первой и третьей части – двучлены. Т.к. $n_1 = 2$, то их последние цифры неизменны, а предыдущие изменяются на единицу, т.е. $0 + 1 = 1$; а $6 - 1 = 5$ получим: 11[37 98]52. Средняя часть есть сумма оставшихся двучленов (в скобках), т.е. $37 + 98 = 135$. Получили 11(135)52, но $\Delta = n_2 - n_1 = 2$, следовательно, в ответе должно быть 6 цифр. Первую цифру скобки прибавляем к единицам первой части. Получим ответ: $99 \cdot 1248 = 123552$.

б) $999 \cdot 7398 = ?$

Решение: умножаем и отделяем первую и третью части 628[7 3]712, первая и третья части ответа – трехчлены, т.к. $n_1 = 3$ (вне скобок). Следовательно, две первые цифры первой части увеличиваются на единицу, а две первые цифры третьей части уменьшаются на единицу, третьи их последние цифры – без перемен. Получим $738[7 3]602 \rightarrow 738(10)602 \rightarrow 7390602$. Итак, ответ: $999 \cdot 7398 = 7390602$.

в) $9 \cdot 1826 = ?$

Решение: 0[715 928]4. Здесь первая и третья части – однозначные, следовательно, остаются без перемен. Среднюю часть находим как сумму трехчленов в скобках по разрядам. Получим 0[16 43]4, а т.к. $\Delta = 3$, то имеем 16434, где $1 = 0 + 1$. Итак, ответ: $9 \cdot 1826 = 16434$.

Замечание: способ разделения десятков и единиц (способ 7) можно применять для нахождения ответа произведения второго сомножителя на любое однозначное число первого сомножителя.

Пример: $7 \cdot 6483 = ?$

Решение: $4[252 \quad 286]1 \rightarrow 45381$, где $538 = 252 + 286$.

Ответ: $7 \cdot 6483 = 45381$.

Отметим, что из всех приведенных способов умножения, способы 1, 3, 4, 5 могут использоваться также, если первый сомножитель состоит из других однородных цифр.

Примеры:

а) метод 3: $11111 \cdot 584 = ?$

$n_1 > n_2$; $\Delta = 2$; $n_2 = 3 \rightarrow (05)(08)(04)$. Суммируем справа налево цифры в количествах 1, 3, 5, а затем для получения средней части суммируем дважды по шесть цифр т.к. $\Delta = 2$, а затем слева направо – цифры в количестве 5, 3, 1. Везде с учетом индексов. Получим: $064 \underset{1}{8} \underset{1}{8} \underset{1}{8} \underset{1}{2} \underset{1}{4}$. Итак, ответ: $11111 \cdot 584 = 06488824$. Ноль добавлен впереди для формализации ответа, т.к. количество цифр в ответе должно равняться $n_1 + n_2 = 5 + 3 = 8$.

б) метод 4: $8888 \cdot 67 = ?$

$(6 \cdot 8)(13 \cdot 8)(13 \cdot 8)(7 \cdot 8) \rightarrow (48)(104)(104)(104)(56) \rightarrow$ переходим к двучленам $\rightarrow (58)(14)(14)(04)(56) \rightarrow 595496$.

Ответ: $8888 \cdot 67 = 595496$.

2 Цифра 9 может применяться при нахождении первой и второй, а, следовательно, и третьей частей ответа произведения, в которых первый сомножитель может состоять из других однородных цифр (не девяток), а второй – из произвольных цифр (для случаев $n_1 \geq n_2$). Рассмотрим несколько вариантов.

① Число 9 делится на цифру 1-го сомножителя, затем 2-ой сомножитель делится на полученный результат. В результате получаем, как правило, дробное число, целая часть которого и есть первая часть ответа, а первая цифра десятичной дроби – периодическая цифра второй части ответа. Если в результате деления получаем целое число, то от него отнимаем единицу, а в качестве дробной части (второй части ответа) записываем девятки в количестве равном Δ . Третья часть ответа находится, как разность второй и первой частей ответа, причем вторая часть берется с количеством цифр равным n_2 .

Примеры:

1) $6666 \cdot 47 = ?$

Решение: $9:6=1,5$; $47:1,5=31,33$. Первая часть ответа – 31 ($n_2 = 2$), а периодическое число второй части 3, но $31 < 33$, следовательно сбоя нет. Тогда третья часть ответа равна $33 - 31 = 02$. Итак, ответ: $6666 \cdot 47 = 313302$.

2) $3333 \cdot 8496 = ?$

Решение: $9:3=3$; $8496:3=2832$ – целое. В этом случае результат записываем как $2831,99\dots$, где 2831 – первая часть ответа, а 9999 – вторая часть, тогда третья часть $9999 - 2831 = 7168$, а т.к. $\Delta = 0$, получаем ответ, состоящий из первой и третьей части.

Ответ: $3333 \cdot 8496 = 28317168$.

3) $5555 \cdot 67 = ?$

Решение: $9:5=1,8$; $67:1,8=37,22$. В этом случае $22 < 37$, следовательно, имеем сбой в средней части. Средняя часть ответа $21 (\Delta = 2)$. В этом случае, чтобы найти третью часть ответа находим $121 - 36 = 85$. Итак, ответ: $5555 \cdot 67 = 372185$.

4) $8888 \cdot 573 = ?$

Решение: $9:8=1,125$; $593:1,125=509,33$. Средняя часть ответа (виртуальной) 1332, тогда третья часть: $1332 - 508 = 824$; $508 = 509 - 1$ (в случае сбоя отнимается 1).

Ответ: $8888 \cdot 573 = 509\ 2\ 824$. Средняя часть ответа 2 – число сбоя, т.к. $\Delta = 1$.

Составим таблицу результатов деления девятки на различные однозначные цифры (k_i), где k_i – периодическое число первого сомножителя.

Таблица 1

Деление девятки на однозначные числа

k_i	1	2	3	4	5	6	7	8		9
$9:k_i$	9	4,5	3	2,25	1,8	1,5	1,285714286...	1,125		1

Из таблицы 1 следует, что самой неудобной цифрой для этого метода является цифра 7. В этом случае можно воспользоваться другими приемами умножения.

② $7777 \cdot 83 = ?$

$83 \cdot 7 = 581$; $581:9=64,55$. Но $55 < 64$, имеет место сбой. Т.к. $\Delta = 2$, то средняя часть ответа 54, тогда третью часть (в случае сбоя) находим как разность $154 - 63 = 91$, где $63 = 64 - 1$. Итак, ответ: $7777 \cdot 83 = 645491$.

③ Способ

$$1) \quad 7777 \cdot 83 = ?$$

$$9999 \cdot 83 \cdot \frac{7}{9} = 829917 \cdot \frac{7}{9} = 92213 \cdot 7 = 645491. \text{ И так, ответ: } 7777 \cdot 83 = 645491.$$

$$2) \quad 555 \cdot 67 = ?$$

$$999 \cdot 67 \cdot \frac{5}{9} = 66933 \cdot \frac{5}{9} = 7437 \cdot 5 = 37185. \text{ И так, ответ: } 555 \cdot 67 = 37185.$$

Замечание: можно использовать при нахождении ответа, первый сомножитель, состоящий из единиц в количестве n_1 , при умножении его на второй сомножитель, а затем результат произведения умножим на цифру первого сомножителя. Но умножения с помощью девяток – более простой вариант, особенно для случаев, когда второй сомножитель трехчлен, четырёхчлен и т.д. ($n_1 \geq n_2$).

Заключение

Обзор различных методов указанных произведений двух сомножителей позволяет в различных случаях применять упрощенные способы любых аналогичных произведений. (Некоторые методы будут рассмотрены в приложениях 1 и 2 к данной статье). Кроме того, методы могут быть актуальны в связи с процессами, разворачивающимися в пространстве Земли и космоса, и переходом в новую частотную среду обитания [4], где все технические средства могут выйти из строя [5].

Список литературы

1. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. Москва: АСТ, 2021. 509 с.
2. Лутфулин М. Д. Селиверстова И.Ф. Занимательная арифметика 2 // Международный студенческий научный вестник. 2019. №6.; URL: <https://eduherald.ru/ru/article/view?id=19859> (дата обращения 16.10.2022).
3. Егорова Т. В. Словарь иностранных слов современного русского языка. Москва: Аделант, 2014. 800 с.
4. Дмитриев А.Н. Агни-Йога – новый уровень знания (доклады на спецкурсе НГУ Побединой А.Ф. «Духовное наследие семьи Рерихов»). Новосибирск: Офсет-ТМ, 2021. 572 с.
5. Дмитриев А.Н., Русанов А.В. Пришествие эпохи огня. Новосибирск: Твердыня (Томск), 2004. 71 с.