Колодин Александр Васильевич.

Пенсионер.

О «числе» е и его производных.

В статье приводятся расчёты числа е и его производных на основе суммы ряда, обратного факториалу чисел, и второго замечательного предела.
В итоге делается вывод о необходимости ревизии разделов и приложений высшей математики, основанной на числе е.

Число е, сумма ряда, второй замечательный предел.

Kolodin Aleksandr Vasil'evich.

Retired.

The article presents the calculation of the number e and its derivatives based on the sums of inverse factorial numbers, and the second remarkable limit.

In the end, the conclusion about the necessity of revision topics and applications of mathematics, based on the number of E.

The number e, the sum of the series, the second remarkable limit.

О «числе» e и его производных.

1. Введение.

Что известно о числе e?

Из Википедии – свободной энциклопедии узнаём, что:

«Число e - основание натурального логарифма, математическая константа, иррациональное и трансцендентное число. Иногда его называют числом Эйлера или числом Непера».

Приводится «первые тысяча знаков после запятой числа e:

2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274 2746639193 2003059921 8174135966 2904357290 0334295260 5956307381 3232862794 3490763233 8298807531 9525101901 1573834187 9307021540 8914993488 4167509244 7614606680 8226480016 8477411853 7423454424 3710753907 7744992069 5517027618 3860626133 1384583000 7520449338 2656029760 6737113200 7093287091 2744374704 7230696977 2093101416 9283681902 5515108657 4637721112 5238978442 5056953696 7707854499 6996794686 4454905987 9316368892 3009879312 7736178215 4249992295 7635148220 8269895193 6680331825 2886939849 6465105820 9392398294 8879332036 2509443117 3012381970 6841614039 7019837679 3206832823 7646480429 5311802328 7825098194 5581530175 6717361332 0698112509 9618188159 3041690351 5988885193 4580727386 6738589422 8792284998 9208680582 5749279610 4841984443 6346324496 8487560233 6248270419 7862320900 2160990235 3043699418 4914631409 3431738143 6405462531 5209618369 0888707016 7683964243 7814059271 4563549061 3031072085 1038375051 0115747704 1718986106 8739696552 1267154688 9570350354».

В настоящее время известно свыше триллиона точных знаков после запятой.

Считается, что впервые нашёл это число Якоб Бернулли, решая задачу о сложных процентах в 1690 году.

Правда, ранее был Непер, Ньютон, Лейбниц, который называл это число буквой “b”.

Букву “e” применил Эйлер в 1737 году. Он и вычислил это число с точностью до 8 знака после запятой: 2,718281828.

Для запоминания: два и семь, дважды дата рождения Льва Толстого, углы прямоугольного треугольника: 45°, 90° и 45°.

В моём компьютере всего лишь тринадцать точных знаков после запятой: e =2,718281828459050, - но, думаю, для расчётов этого вполне достаточно, ведь логарифмическая линейка имеет точность всего три знака.

Число e можно определить различными способами:

1. как сумму ряда:

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

2. через предел (второй замечательный предел):

$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

Благодаря тому, что $\frac{de^x}{dx} = e^x$ и $\int e^x dx = e^x$, число e является краеугольным камнем в математическом анализе.

Но так ли это в действительности?

Проверке этих общепринятых значений и посвящена данная работа.

2. Число e, как сумма ряда: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{1*2*3} + \cdots + \frac{1}{1*2*3*\ldots n}$, или:

$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

Считается, что первым, кто просуммировал этот ряд и получил результат, был Исаак Ньютон в 1665 году. И, действительно, Тейлор и Маклорен появились на свет значительно позже. Но, как не странно, формулы разложения функций в степенные ряды носят их имена, в отличие от Ньютона, именем которого названа совсем другая формула: бином Ньютона: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$ или в нашем случае: $\left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{n}}$**, -** то есть сумма двух чисел в любой степени.

Примечание: в отличие от общепринятых обозначений, целые числа будут писаться с большой буквы **N**, с маленькой буквой **n** – любые действительные числа.

Посчитаем, к чему стремится сумма ряда: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N!}$.

где **N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, … ,** ∞.

$\boldsymbol{E_0} = \frac{1}{N_{0!}} = \frac{1}{0!} = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{E_1} = \frac{1}{N_0!} + \frac{1}{N_1!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = \mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{2}$

$\boldsymbol{E_2} = \frac{1}{N_0!} + \frac{1}{N_1!} + \frac{1}{N_2!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1*2} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \frac{1}{2} = \mathbf{2{,}5}$ **.**

Расчёты будем вести в табличной форме.

В нашем случае каждое последующее $\mathbf{N_{n+1}}$ будет образовываться от предыдущего $\mathbf{N_n}$ прибавлением единицы:

$\mathbf{N_{n+1} = N_n + 1}$

Таблица 1.

N	N!	1 / N!	E
0	1	1	1
1	1	1	2
2	2	0,5	2,5
3	6	0,166666667	2,666666666666670
4	24	0,041666667	2,708333333333330
5	120	0,008333333	2,716666666666670
6	720	0,001388889	2,718055555555560
7	5040	0,000198413	2,718253968253970
8	40320	2,48016E-05	2,718278769841270
9	362880	2,75573E-06	2,718281525573190
10	3628800	2,75573E-07	2,718281801146380
11	39916800	2,50521E-08	2,718281826198490
12	479001600	2,08768E-09	2,718281828286170
13	6227020800	1,6059E-10	2,718281828446760
14	87178291200	1,14707E-11	2,718281828458230
15	1,30767E+12	7,64716E-13	2,718281828458990
16	2,09228E+13	4,77948E-14	2,718281828459040
17	**3,55687E+14**	**2,81146E-15**	**2,718281828459050**
18	6,40237E+15	1,56192E-16	2,718281828459050
19	1,21645E+17	8,22064E-18	2,718281828459050
20	2,4329E+18	4,11032E-19	2,718281828459050
21	5,10909E+19	1,95729E-20	2,718281828459050
22	1,124E+21	8,89679E-22	2,718281828459050
23	2,5852E+22	3,86817E-23	2,718281828459050
24	6,20448E+23	1,61174E-24	2,718281828459050
25	1,55112E+25	6,44695E-26	2,718281828459050
26	4,03291E+26	2,4796E-27	2,718281828459050
27	1,08889E+28	9,18369E-29	2,718281828459050
28	3,04888E+29	3,27989E-30	2,718281828459050
29	8,84176E+30	1,131E-31	2,718281828459050
30	2,65253E+32	3,76999E-33	2,718281828459050

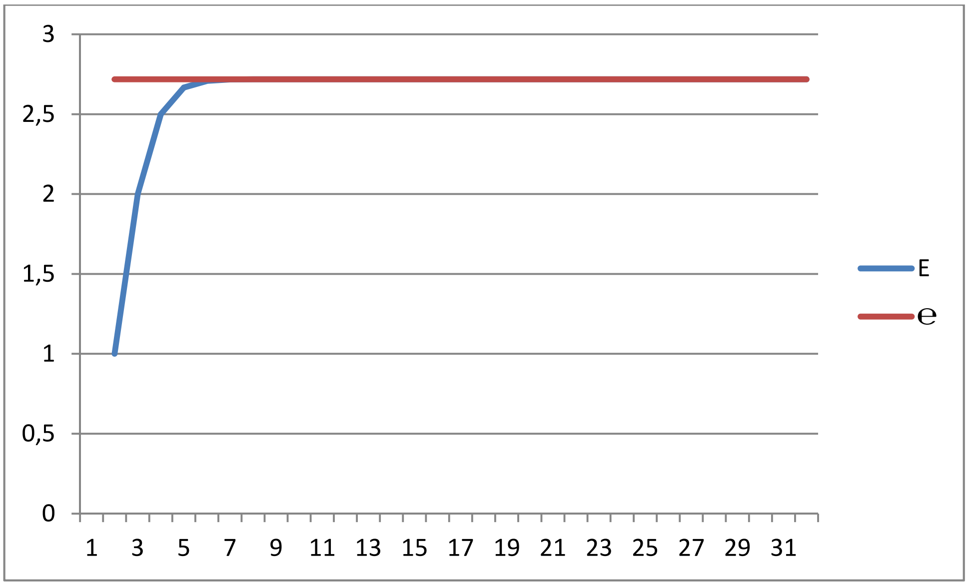
Таким образом, при числе **N**, равном **17**, значение суммы ряда:

$E_{17} = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\mathbf{17}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{17!}}$ = **2,718281828459050**, - то есть равно общепринятому значению числа

$e = \mathbf{2,718281828459050}$. Таким образом, сумма ряда: $\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N!}}$ действительно стремится к числу и имеет предел, который и называется числом e. Следовательно, число e - есть.

На основании данных таблицы 1 представим график 1.

График 1.



3. Второй замечательный предел и число e.

В любом курсе по высшей математике доказывается, что предел числовой последовательности $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$, заключён между двумя числами: **2** и **3**, то есть, - $\mathbf{2} < \{x_n\} < 3$.

Считается, что значение этого предела при **n** → ∞ и есть число e.

$$e = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = 2,718281828459050 ,$$

где **N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, … ,** ∞.

3.1. Вычисление второго замечательного предела при различных значениях чисел N.

Считаем, что e **=2,718281828459050**.

Расчёты будем вести в табличной форме.

Каждое последующее $\mathbf{N_{n+1}}$ будет образовываться удвоением от предыдущего $\mathbf{N_n}$:

$\mathbf{N_{n+1} = 2 * N_n}$ **.**

Для каждого $\mathbf{N_n}$ существует значение $E_n = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n$

$E = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$ при **N** → ∞ , **E** → e , и в пределе **E** = e.

Таблица 2.

N	e	$E = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$	Δ
1	2,718281828	2	0,718281828
2	2,718281828	2,25	0,468281828
4	2,718281828	2,44140625	0,276875578
8	2,718281828	2,565784514	0,152497315
16	2,718281828	2,637928497	0,080353331
32	2,718281828	2,676990129	0,041291699
64	2,718281828	2,697344953	0,020936876
128	2,718281828	2,70773902	0,010542809
256	2,718281828	2,712991624	0,005290204
512	2,718281828	2,715632	0,002649828
1024	2,718281828	2,716955729	0,001326099
2048	2,718281828	2,717618482	0,000663346
4096	2,718281828	2,717950081	0,000331747
8192	2,718281828	2,718115936	0,000165892
16384	2,718281828	2,718198878	8,29507E-05
32768	2,718281828	2,718240352	4,14765E-05
65536	2,718281828	2,71826109	2,07386E-05
131072	2,718281828	2,718271459	1,03694E-05
262144	2,718281828	2,718276644	5,18469E-06
524288	2,718281828	2,718279236	2,59234E-06
1048576	2,718281828	2,718280532	1,29618E-06
2097152	2,718281828	2,71828118	6,48095E-07
4194304	2,718281828	2,718281504	3,2406E-07
8388608	2,718281828	2,718281666	1,62038E-07
16777216	2,718281828	2,718281747	8,10322E-08
33554432	2,718281828	2,718281788	4,05267E-08
67108864	2,718281828	2,718281808	2,02766E-08
134217728	2,718281828	2,718281808	2,02766E-08
268435456	2,718281828	2,718281808	2,02766E-08
536870912	2,718281828	2,718281808	2,02766E-08
1073741824	2,718281828	2,718281808	2,02766E-08
2147483648	2,718281828	2,718281808	2,02766E-08
4294967296	2,718281828	2,718281828	3,1645E-10
8589934592	2,718281828	2,718281828	1,58225E-10
17179869184	2,718281828	2,718281828	7,91123E-11
34359738368	2,718281828	2,718281828	3,95559E-11
68719476736	2,718281828	2,718281828	1,9778E-11
1,37439E+11	2,718281828	2,718281828	9,88898E-12
2,74878E+11	2,718281828	2,718281828	4,94449E-12
5,49756E+11	2,718281828	2,718281828	2,47224E-12
1,09951E+12	2,718281828	2,718281828	1,2359E-12
2,19902E+12	2,718281828	2,718281828	6,17728E-13

4,39805E+12	2,718281828	2,718281828	3,09086E-13
8,79609E+12	2,718281828	2,718281828	1,54543E-13
1,75922E+13	2,718281828	2,718281828	7,72715E-14
3,51844E+13	2,718281828	2,718281828	3,86358E-14
7,03687E+13	2,718281828	2,718281828	1,90958E-14
1,40737E+14	2,718281828	2,718281828	9,32587E-15
2,81475E+14	2,718281828	2,718281828	4,88498E-15
5,6295E+14	**2,718281828**	**2,718281828**	**0**
1,1259E+15	2,718281828	2,718281828	0
2,2518E+15	2,718281828	2,718281828	0
4,5036E+15	2,718281828	2,718281828	0
9,0072E+15	**2,718281828**	**1**	**1,718281828**
1,80144E+16	**2,718281828**	**1**	**1,718281828**

Примечание: красным цветом выделены значения **E = 1**.

При значении **N = 5,6295E+14, E** = е = **2,718281828459050**.

Таким образом, можно утверждать, что бесконечность начинается с числа **N ≥ 5,6295E+14**, ведь при таком значении **N** второй замечательный предел:

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N} = 2,718281828459050 = e\,.$$

Но при значении **N≥ 9,0072E+15**, $E_{9,0072E+15} = \left(1+\frac{1}{9,0072E+15}\right)^{9,0072E+15} = 1$, что не равно числу е**.**

Почему значения **E** получились такими?

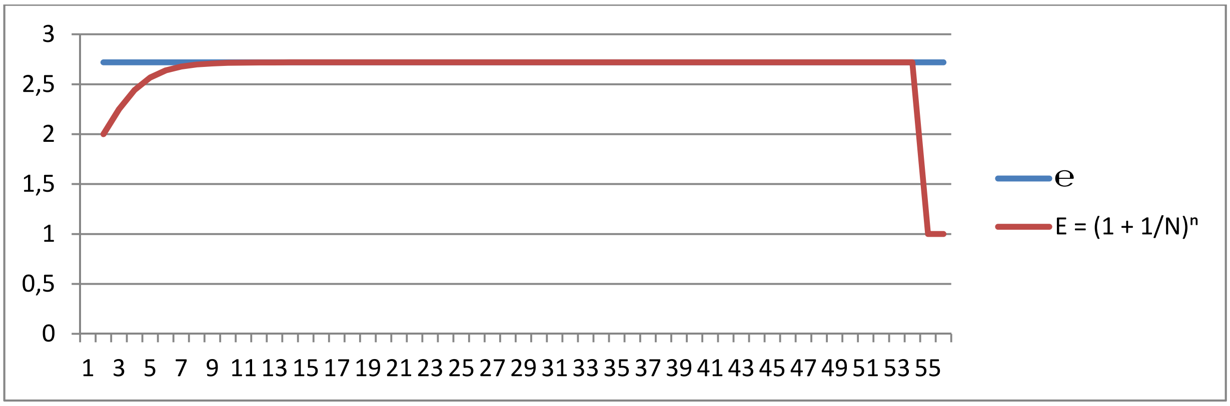
Самое простое объяснение такое: $E_{9,0072E+15} = \left(1+\frac{1}{9,0072E+15}\right)^{9,0072E+15} = 1$, то есть значение в скобках: $\left(1+\frac{1}{9,0072E+15}\right)$ при **N= 9,0072E+15** становится равным единице, а должно быть больше единицы, значит, так заложено в программном обеспечении компьютера или зависит от мощности компьютера, что уже само по себе неверно. Ниже будет дано объяснение этому явлению.

Но как бы там ни было, значение бесконечности распространяется до **N≤ 9,0072E+15**.

При числах **N≥ 9,0072E+15**, именно в бесконечности, второй замечательный предел становится равным единице.

На основании данных таблицы 2, представлен график 2.

График 2.



Проверим полученный результат при нескольких вариантах значения чисел:

числа $\mathbf{N_2}$ образуются при помощи умножения каждого предыдущего числа на 2, числа $\mathbf{N_3}$ - на 3, числа $\mathbf{N_5}$ - на 5, числа $\mathbf{N_7}$ - на 7.

Соответственно, по формуле $\boldsymbol{E = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N}$ вычисляются значения $\mathbf{E_2}$ для чисел $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{E_3}$ для чисел $\mathbf{N_3}$, $\mathbf{E_5}$ для чисел $\mathbf{N_5}$, $\mathbf{E_7}$ для чисел $\mathbf{N_7}$.

Данные представлены в таблице 3.

Таблица 3.

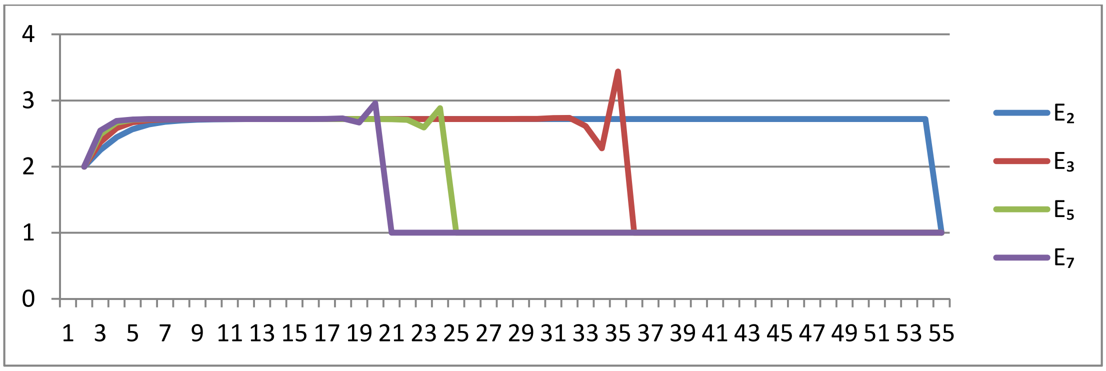
N_2	N_3	N_5	N_7	E_2	E_3	E_5	E_7
1	1	1	1	2	2	2	2
2	3	5	7	2,25	2,37037	2,48832	2,5465
4	9	25	49	2,441406	2,581175	2,665836	2,691053
8	27	125	343	2,565785	2,669594	2,707488	2,71433
16	81	625	2401	2,637928	2,70169	2,71611	2,717716
32	243	3125	16807	2,67699	2,71271	2,717847	2,718201
64	729	15625	117649	2,697345	2,71642	2,718195	2,71827
128	2187	78125	823543	2,707739	2,717661	2,718264	2,71828
256	6561	390625	5764801	2,712992	2,718075	2,718278	2,718282
512	19683	2E+06	4E+07	2,715632	2,718213	2,718281	2,718282
1024	59049	1E+07	2,8E+08	2,716956	2,718259	2,718282	2,718282
2048	177147	5E+07	2E+09	2,717618	2,718274	2,718282	2,718281
4096	531441	2E+08	1,4E+10	2,71795	2,718279	2,718282	2,718279
8192	1594323	1E+09	9,7E+10	2,718116	2,718281	2,718282	2,718279
16384	4782969	6E+09	6,8E+11	2,718199	2,718282	2,718283	2,718162
32768	1,4E+07	3E+10	4,7E+12	2,71824	2,718282	2,718283	2,71939
65536	4,3E+07	2E+11	3,3E+13	2,718261	2,718282	2,718301	2,728004
131072	1,3E+08	8E+11	2,3E+14	2,718271	2,718282	2,718301	2,668276
262144	3,9E+08	4E+12	1,6E+15	2,718277	2,718282	2,719222	2,958674

524288	1,2E+09	2E+13	1,1E+16	2,718279	2,718282	2,71692	1
1048576	3,5E+09	1E+14	8E+16	2,718281	2,718282	2,705438	1
2097152	1E+10	5E+14	5,6E+17	2,718281	2,718282	2,59325	1
4194304	3,1E+10	2E+15	3,9E+18	2,718282	2,718276	2,882884	1
8388608	9,4E+10	1E+16	2,7E+19	2,718282	2,718295	1	1
16777216	2,8E+11	6E+16	1,9E+20	2,718282	2,718295	1	1
33554432	8,5E+11	3E+17	1,3E+21	2,718282	2,718124	1	1
67108864	2,5E+12	1E+18	9,4E+21	2,718282	2,718636	1	1
1,34E+08	7,6E+12	7E+18	6,6E+22	2,718282	2,720171	1	1
2,68E+08	2,3E+13	4E+19	4,6E+23	2,718282	2,720171	1	1
5,37E+08	6,9E+13	2E+20	3,2E+24	2,718282	2,734023	1	1
1,07E+09	2,1E+14	9E+20	2,3E+25	2,718282	2,734023	1	1
2,15E+09	6,2E+14	5E+21	1,6E+26	2,718282	2,611846	1	1
4,29E+09	1,9E+15	2E+22	1,1E+27	2,718282	2,277108	1	1
8,59E+09	5,6E+15	1E+23	7,7E+27	2,718282	3,436177	1	1
1,72E+10	1,7E+16	6E+23	5,4E+28	2,718282	1	1	1
3,44E+10	5E+16	3E+24	3,8E+29	2,718282	1	1	1
6,87E+10	1,5E+17	1E+25	2,7E+30	2,718282	1	1	1
1,37E+11	4,5E+17	7E+25	1,9E+31	2,718282	1	1	1
2,75E+11	1,4E+18	4E+26	1,3E+32	2,718282	1	1	1
5,5E+11	4,1E+18	2E+27	9,1E+32	2,718282	1	1	1
1,1E+12	1,2E+19	9E+27	6,4E+33	2,718282	1	1	1
2,2E+12	3,6E+19	5E+28	4,5E+34	2,718282	1	1	1
4,4E+12	1,1E+20	2E+29	3,1E+35	2,718282	1	1	1
8,8E+12	3,3E+20	1E+30	2,2E+36	2,718282	1	1	1
1,76E+13	9,8E+20	6E+30	1,5E+37	2,718282	1	1	1
3,52E+13	3E+21	3E+31	1,1E+38	2,718282	1	1	1
7,04E+13	8,9E+21	1E+32	7,5E+38	2,718282	1	1	1
1,41E+14	2,7E+22	7E+32	5,2E+39	2,718282	1	1	1
2,81E+14	8E+22	4E+33	3,7E+40	2,718282	1	1	1
5,63E+14	2,4E+23	2E+34	2,6E+41	2,718282	1	1	1
1,13E+15	7,2E+23	9E+34	1,8E+42	2,718282	1	1	1
2,25E+15	2,2E+24	4E+35	1,3E+43	2,718282	1	1	1
4,5E+15	6,5E+24	2E+36	8,8E+43	2,718282	1	1	1
9,01E+15	1,9E+25	1E+37	6,2E+44	1		1	1

Примечание: жёлтым цветом выделены значения **E > e**, красным цветом - значения **E = 1**.

На основании данных таблицы 3 представлен график 3.

График 3.



Данные таблицы 2 подтверждают, что при значении $\mathbf{N_2 \geq 9{,}01E{+}15}$, значения $\mathbf{E_2 = 1}$,

$\mathbf{N_3 \geq 1{,}7E{+}16}$; значения $\mathbf{E_3 = 1}$;

$\mathbf{N_5 \geq 1E{+}16}$, значения $\mathbf{E_5 = 1}$;

$\mathbf{N_7 \geq 1{,}16E{+}16}$, значения $\mathbf{E_7 = 1}$.

Значения $\mathbf{E_3}$, $\mathbf{E_5}$ и $\mathbf{E_7}$ не стремятся к числу е, как своему пределу, а имеют свои пределы.

Только значения $\mathbf{E_2}$ стремятся к числу е, при N = **5,6295E**+14 становятся числом е, но уже при $\mathbf{N_2 \geq 9{,}01E{+}15}$, перестают им быть и становятся равным единице.

Таким образом, второй замечательный предел не имеет предела, равного числу е.

Для проверки этого вывода, вычислим значения **E** по формуле $\boldsymbol{E} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\right)^{\boldsymbol{N}}$, где числа **N**, начиная с **N = 10000000000 ($\mathbf{10^{10}}$)** будут увеличиваться на **1000000000 ($\mathbf{10^{9}}$)**.

Таблица 4.

N	е	E = (1 + 1 / N) ^ N	Δ = е - E	(1 + 1 / N) ⁿ / е
1	2,718281828	2	0,7182818284590	0,735758882
10	2,718281828	2,59374246	0,1245393683590	0,954184527
100	2,718281828	2,704813829	0,0134679990375	0,9950454
1000	2,718281828	2,716923932	0,0013578962235	0,999500458
10000	2,718281828	2,718145927	0,0001359016347	0,999950005
100000	2,718281828	2,718268237	0,0000135912615	0,999995
1000000	2,718281828	2,718280469	0,0000013593026	0,9999995
10000000	2,718281828	2,718281694	0,0000001344787	0,999999951
100000000	2,718281828	2,718281786	0,0000000420632	0,999999985
1E+09	**2,718281828**	**2,718282031**	**-0,0000002023555**	**1,000000074**
1E+10	2,718281828	2,718282053	-0,0000002247757	1,000000083
2E+10	2,718281828	2,718282053	-0,0000002248437	1,000000083
3E+10	2,718281828	2,718282053	-0,0000002248664	1,000000083
4E+10	2,718281828	2,718282053	-0,0000002248777	1,000000083
5E+10	2,718281828	2,718282053	-0,0000002248845	1,000000083

6E+10	2,718281828	2,718282053	-0,0000002248890	1,000000083
7E+10	2,718281828	2,718276018	0,0000058108997	0,999997862
8E+10	2,718281828	2,718282053	-0,0000002248947	1,000000083
9E+10	2,718281828	2,718282053	-0,0000002248966	1,000000083
1E+11	2,718281828	2,718282053	-0,0000002248981	1,000000083
2E+11	2,718281828	2,718282053	-0,0000002249049	1,000000083
3E+11	2,718281828	2,718282053	-0,0000002249071	1,000000083
4E+11	2,718281828	2,718282053	-0,0000002249083	1,000000083
5E+11	2,718281828	2,718221696	0,0000601324074	0,999977879
6E+11	2,718281828	2,718282053	-0,0000002249094	1,000000083
7E+11	2,718281828	2,718402772	-0,0001209435631	1,000044493
8E+11	2,718281828	2,718040632	0,0002411963145	0,999911269
9E+11	2,718281828	2,718282053	-0,0000002249101	1,000000083
1E+12	2,718281828	2,718523496	-0,0002416675782	1,000088905
2E+12	2,718281828	2,718523496	-0,0002416675789	1,000088905
3E+12	2,718281828	2,71791993	0,0003618988847	0,999866865
4E+12	2,718281828	2,718523496	-0,0002416675792	1,000088905
5E+12	2,718281828	2,719127197	-0,0008453680767	1,000310994
6E+12	2,718281828	2,719731031	-0,0014492026374	1,000533132
7E+12	2,718281828	2,716713199	0,0015686298305	0,999422933
8E+12	2,718281828	2,718523496	-0,0002416675794	1,000088905
9E+12	2,718281828	2,716110034	0,0021717943722	0,999201042
1E+13	2,718281828	2,716110034	0,0021717943721	0,999201042
2E+13	2,718281828	2,716110034	0,0021717943721	0,999201042
3E+13	2,718281828	2,716110034	0,0021717943721	0,999201042
4E+13	2,718281828	2,728198808	-0,0099169798205	1,003648253
5E+13	2,718281828	2,716110034	0,0021717943720	0,999201042
6E+13	2,718281828	2,716110034	0,0021717943720	0,999201042
7E+13	2,718281828	2,704074826	0,0142070026510	0,994773536
8E+13	2,718281828	2,704074826	0,0142070026510	0,994773536
9E+13	2,718281828	2,716110034	0,0021717943720	0,999201042
1E+14	2,718281828	2,716110034	0,0021717943720	0,999201042
2E+14	2,718281828	2,777094348	-0,0588125198594	1,021635917
3E+14	2,718281828	2,716110034	0,0021717943720	0,999201042
4E+14	2,718281828	2,656464921	0,0618169079441	0,97725883
5E+14	2,718281828	2,716110034	0,0021717943720	0,999201042
6E+14	2,718281828	2,903201529	-0,1849197007248	1,068028156
7E+14	2,718281828	2,541075307	0,1772065213851	0,934809364
8E+14	2,718281828	2,903201529	-0,1849197007248	1,068028156
9E+14	2,718281828	2,716110034	0,0021717943720	0,999201042
1E+15	2,718281828	3,035035207	-0,3167533780902	1,116527056
2E+15	2,718281828	2,430697905	0,2875839237530	0,894203787
3E+15	2,718281828	3,789627122	-1,0713452935126	1,394125908
4E+15	2,718281828	2,430697905	0,2875839237530	0,894203787
5E+15	2,718281828	3,035035207	-0,3167533780902	1,116527056
6E+15	2,718281828	3,789627122	-1,0713452935126	1,394125908

7E+15	2,718281828	4,731831016	-2,0135491870735	1,74074335
8E+15	2,718281828	5,908292304	-3,1900104754832	2,173539271
9E+15	2,718281828	7,377253717	-4,6589718888092	2,713939975
1E+16	2,718281828	1	1,7182818284591	0,367879441
1E+17	2,718281828	1	1,7182818284591	0,367879441

Примечание: жёлтым цветом выделены значения **E > e**, красным цветом - значения **E = 1**.

На основании данных таблицы 4 представлены графики 4, 5 и 6.

График 4.

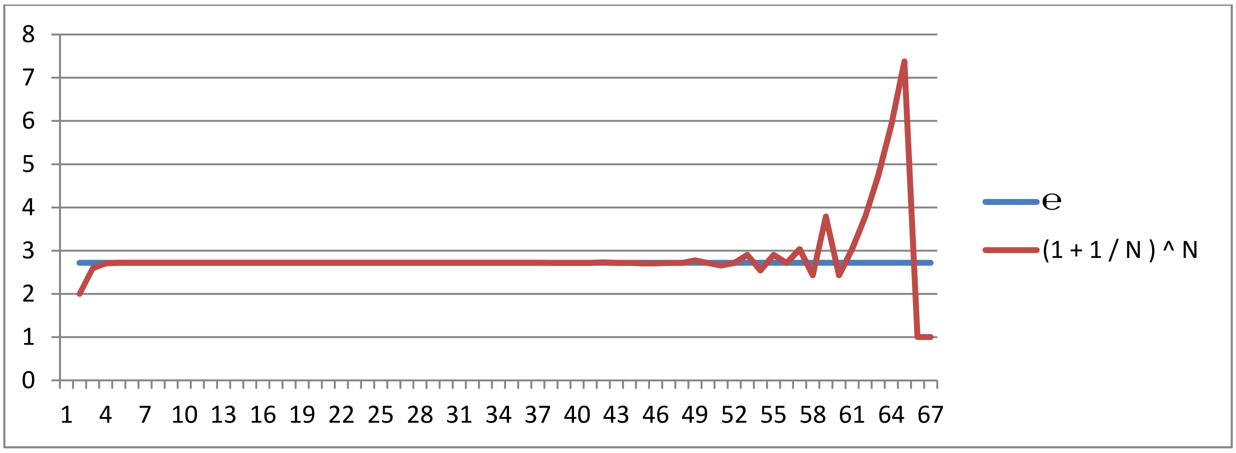


График 5.

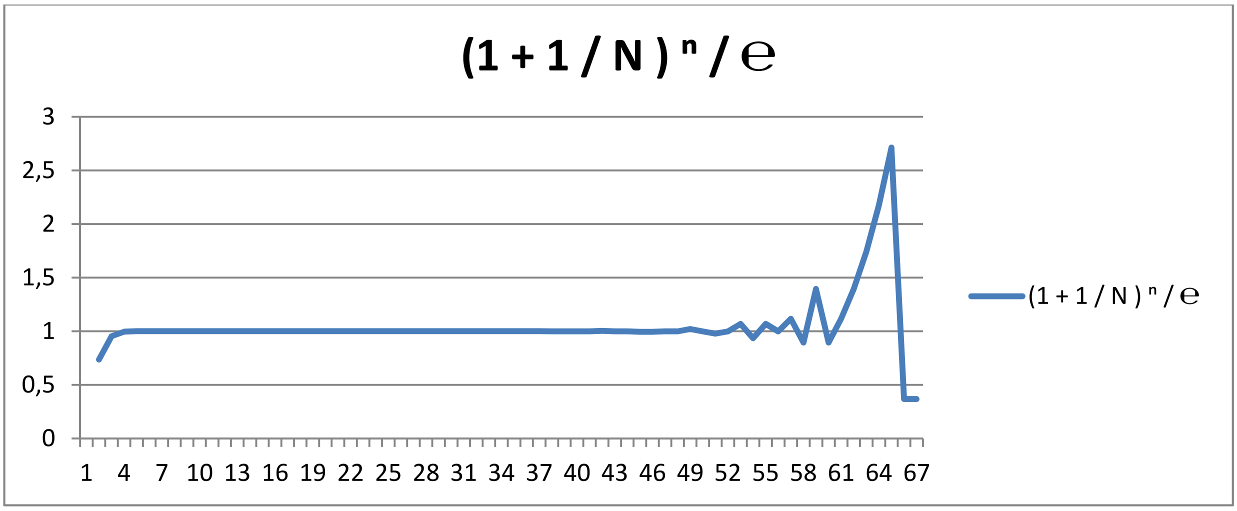
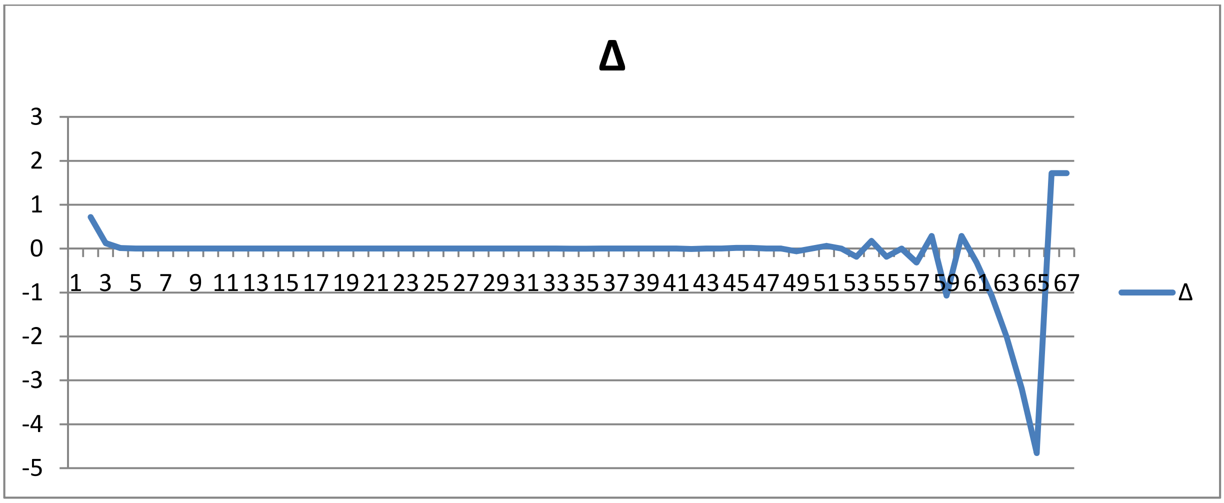


График 6.



3.2. Проверка значений второго замечательного предела при помощи логарифмов.

Для проверки полученных значений второго замечательного предела проверим полученные значения при помощи логарифмов: по основанию 2 и основанию e (натуральных логарифмов).

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$E = \left(1+\frac{1}{N}\right)^N$$

$$E = 2^{N*\log_2\left(1+\frac{1}{N}\right)}$$

$$E = e^{N*\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)}$$

Таблица 5.

N	e	$E = \left(1+\frac{1}{N}\right)^N$	$E = 2^{N*\log_2\left(1+\frac{1}{N}\right)}$	$E = e^{N*\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)}$
1	2,718281828	2	2	2
2	2,718281828	2,25	2,25	2,25
3	2,718281828	2,37037037	2,37037037	2,37037037
4	2,718281828	2,44140625	2,44140625	2,44140625
5	2,718281828	2,48832	2,48832	2,48832
6	2,718281828	2,521626372	2,521626372	2,521626372
7	2,718281828	2,546499697	2,546499697	2,546499697
8	2,718281828	2,565784514	2,565784514	2,565784514
9	2,718281828	2,581174792	2,581174792	2,581174792

10	2,718281828	2,59374246	2,59374246	2,59374246
20	2,718281828	2,653297705	2,653297705	2,653297705
30	2,718281828	2,674318776	2,674318776	2,674318776
40	2,718281828	2,685063838	2,685063838	2,685063838
50	2,718281828	2,691588029	2,691588029	2,691588029
60	2,718281828	2,695970139	2,695970139	2,695970139
70	2,718281828	2,699116371	2,699116371	2,699116371
80	2,718281828	2,701484941	2,701484941	2,701484941
90	2,718281828	2,703332461	2,703332461	2,703332461
100	2,718281828	2,704813829	2,704813829	2,704813829
200	2,718281828	2,711517123	2,711517123	2,711517123
300	2,718281828	2,713765158	2,713765158	2,713765158
400	2,718281828	2,714891744	2,714891744	2,714891744
500	2,718281828	2,715568521	2,715568521	2,715568521
600	2,718281828	2,716020049	2,716020049	2,716020049
700	2,718281828	2,716342738	2,716342738	2,716342738
800	2,718281828	2,716584847	2,716584847	2,716584847
900	2,718281828	2,716773208	2,716773208	2,716773208
1000	2,718281828	2,716923932	2,716923932	2,716923932
2000	2,718281828	2,717602569	2,717602569	2,717602569
3000	2,718281828	2,71782892	2,71782892	2,71782892
4000	2,718281828	2,717942121	2,717942121	2,717942121
5000	2,718281828	2,71801005	2,71801005	2,71801005
6000	2,718281828	2,71805534	2,71805534	2,71805534
7000	2,718281828	2,718087691	2,718087691	2,718087691
8000	2,718281828	2,718111955	2,718111955	2,718111955
9000	2,718281828	2,718130828	2,718130828	2,718130828
10000	2,718281828	2,718145927	2,718145927	2,718145927
20000	2,718281828	2,718213875	2,718213875	2,718213875
30000	2,718281828	2,718236525	2,718236525	2,718236525
40000	2,718281828	2,718247851	2,718247851	2,718247851
50000	2,718281828	2,718254646	2,718254646	2,718254646
60000	2,718281828	2,718259176	2,718259177	2,718259176
70000	2,718281828	2,718262412	2,718262413	2,718262413
80000	2,718281828	2,718264839	2,718264839	2,71826484
90000	2,718281828	2,718266727	2,718266727	2,718266727
100000	2,718281828	2,718268237	2,718268238	2,718268237
200000	2,718281828	2,718275033	2,718275033	2,718275033
300000	2,718281828	2,718277298	2,718277298	2,718277298
400000	2,718281828	2,71827843	2,718278432	2,71827843
500000	2,718281828	2,71827911	2,71827911	2,71827911
600000	2,718281828	2,718279563	2,718279567	2,718279565
700000	2,718281828	2,718279887	2,718279889	2,718279888
800000	2,718281828	2,71828013	2,718280129	2,71828013
900000	2,718281828	2,718280318	2,718280318	2,718280315
1000000	2,718281828	2,718280469	2,718280469	2,71828047

2000000	2,718281828	2,718281149	2,718281152	2,718281155
3000000	2,718281828	2,718281376	2,718281366	2,718281373
4000000	2,718281828	2,718281489	2,7182815	2,718281493
5000000	2,718281828	2,718281555	2,71828154	2,718281546
6000000	2,718281828	2,718281602	2,718281607	2,71828159
7000000	2,718281828	2,718281634	2,718281627	2,718281628
8000000	2,718281828	2,718281655	2,718281661	2,718281667
9000000	2,718281828	2,71828168	2,718281668	2,718281706
10000000	2,718281828	2,718281694	2,718281674	2,718281667
20000000	2,718281828	2,718281754	2,718281875	2,71828186
30000000	2,718281828	2,71828179	2,718282009	2,718282053
40000000	2,718281828	2,718281803	2,718281607	2,718281667
50000000	2,718281828	2,718281817	2,718281808	2,718282053
60000000	2,718281828	2,718281808	2,718282009	2,718282053
70000000	2,718281828	2,718281836	2,718281674	2,718281764
80000000	2,718281828	2,718281803	2,718281875	2,718281667
90000000	2,718281828	2,718281831	2,71828221	2,718282053
100000000	2,718281828	2,718281786	2,718281473	2,718281088
200000000	2,718281828	2,718281786	2,718282143	2,718282053
300000000	2,718281828	2,718281857	2,718282812	2,718282053
400000000	2,718281828	2,718281786	2,718283482	2,718283985
500000000	2,718281828	2,718281729	2,718281473	2,718282053
600000000	2,718281828	2,718281676	2,718280804	2,718282053
700000000	2,718281828	2,718281922	2,718282143	2,718281088
800000000	2,718281828	2,718282028	2,718280804	2,718283985
900000000	2,718281828	2,718282025	2,718282812	2,718282053
1000000000	2,718281828	2,718282031	2,718278126	2,718282053
2000000000	2,718281828	2,718282031	2,718278126	2,718272396
3000000000	2,718281828	2,718282051	2,718264739	2,718282053
4000000000	2,718281828	2,718282031	2,718291514	2,718291711
5000000000	2,718281828	2,718282053	2,718264739	2,718282053
6000000000	2,718281828	2,718282053	2,718345066	2,718311025
7000000000	2,718281828	2,718280242	2,718197801	2,718233767
8000000000	2,718281828	2,718282053	2,718264739	2,718253082
9000000000	2,718281828	2,718282053	2,718264739	2,718282053
1E+10	2,718281828	2,718282053	2,718264739	2,718233767
2E+10	2,718281828	2,718282053	2,718264739	2,71833034
3E+10	2,718281828	2,718282053	2,717863136	2,718137198
4E+10	2,718281828	2,718282053	2,718264739	2,71833034
5E+10	2,718281828	2,718282053	2,718398619	2,718523496
6E+10	2,718281828	2,718282053	2,718264739	2,718137198
7E+10	2,718281828	2,718276018	2,717729282	2,718233767
8E+10	2,718281828	2,718282053	2,718264739	2,718716666
9E+10	2,718281828	2,718282053	2,719469903	2,718716666
1E+11	2,718281828	2,718282053	2,717729282	2,717557854
2E+11	2,718281828	2,718282053	2,717729282	2,717557854

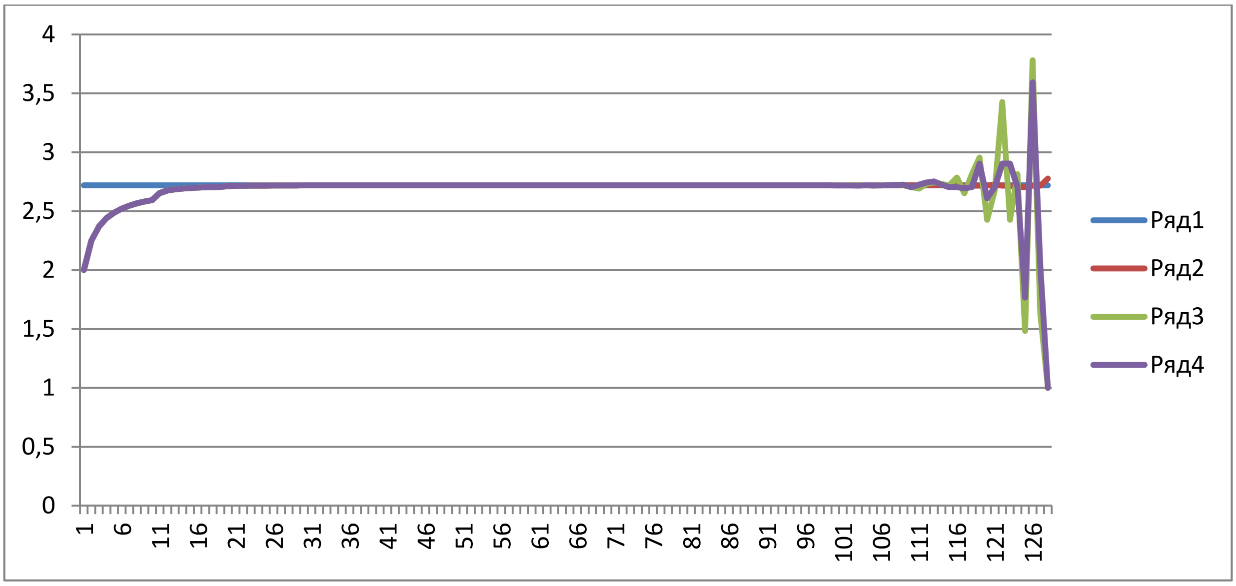
3E+11	2,718281828	2,718282053	2,719068122	2,717557854
4E+11	2,718281828	2,718282053	2,720407622	2,715627599
5E+11	2,718281828	2,718221696	2,717729282	2,718523496
6E+11	2,718281828	2,718282053	2,715053578	2,717557854
7E+11	2,718281828	2,718402772	2,717729282	2,717557854
8E+11	2,718281828	2,718040632	2,720407622	2,719489481
9E+11	2,718281828	2,718282053	2,723088602	2,72045581
1E+12	2,718281828	2,718523496	2,717729282	2,723356855
2E+12	2,718281828	2,718523496	2,704377082	2,704074826
3E+12	2,718281828	2,71791993	2,691090481	2,723356855
4E+12	2,718281828	2,718523496	2,731147405	2,74277638
5E+12	2,718281828	2,719127197	2,744631777	2,752538009
6E+12	2,718281828	2,719731031	2,731147405	2,723356855
7E+12	2,718281828	2,716713199	2,717729282	2,704074826
8E+12	2,718281828	2,718523496	2,785485663	2,704074826
9E+12	2,718281828	2,716110034	2,651621061	2,694485067
1E+13	2,718281828	2,716110034	2,813058871	2,704074826
2E+13	2,718281828	2,716110034	2,955073509	2,903201529
3E+13	2,718281828	2,716110034	2,426668306	2,60969327
4E+13	2,718281828	2,728198808	2,677869158	2,704074826
5E+13	2,718281828	2,716110034	3,425600329	2,903201529
6E+13	2,718281828	2,716110034	2,426668306	2,903201529
7E+13	2,718281828	2,704074826	2,813058871	2,704074826
8E+13	2,718281828	2,704074826	1,482913235	1,765500445
9E+13	2,718281828	2,716110034	3,780207392	3,592961973
1E+14	2,718281828	2,716110034	1,636419615	2,035095478
2E+14	**2,718281828**	**2,777094348**	**1**	**1**
3E+14	2,718281828	2,716110034	19,20295481	8,428579119
4E+14	2,718281828	2,656464921	7,170983227	17,15296325
5E+14	2,718281828	2,716110034	11,73473761	34,90791795
6E+14	2,718281828	2,903201529	1	1
7E+14	2,718281828	2,541075307	1	1
8E+14	2,718281828	2,903201529	1	1
9E+14	2,718281828	2,716110034	7081,156291	598,7742338
1E+15	2,718281828	3,035035207	1	1
2E+15	2,718281828	2,430697905	1	1
3E+15	2,718281828	3,789627122	6,81837E+12	1809437884
4E+15	2,718281828	2,430697905	1	1
5E+15	2,718281828	3,035035207	1	1
6E+15	2,718281828	3,789627122	1	1
7E+15	2,718281828	4,731831016	1	1
8E+15	2,718281828	5,908292304	1	1
9E+15	2,718281828	7,377253717	1	1
1E+16	2,718281828	1	1	1
2E+16	2,718281828	1	1	1
3E+16	2,718281828	1	1	1

4E+16	2,718281828	1	1	1
5E+16	2,718281828	1	1	1
6E+16	2,718281828	1	1	1
7E+16	2,718281828	1	1	1
8E+16	2,718281828	1	1	1
9E+16	2,718281828	1	1	1
1E+17	2,718281828	1	1	1

Примечание: жёлтым цветом выделены значения **E > e**, красным цветом - значения **E = 1**, синим цветом - значения **E < 2**.

На основании данных таблицы 5 представим график 7.

График 7.



Для большей наглядности полученных результатов преобразуем данные таблицы 5: выберем интервал чисел **N** от **1,00E+10** до **2,00E+14**, - получим таблицу 6.

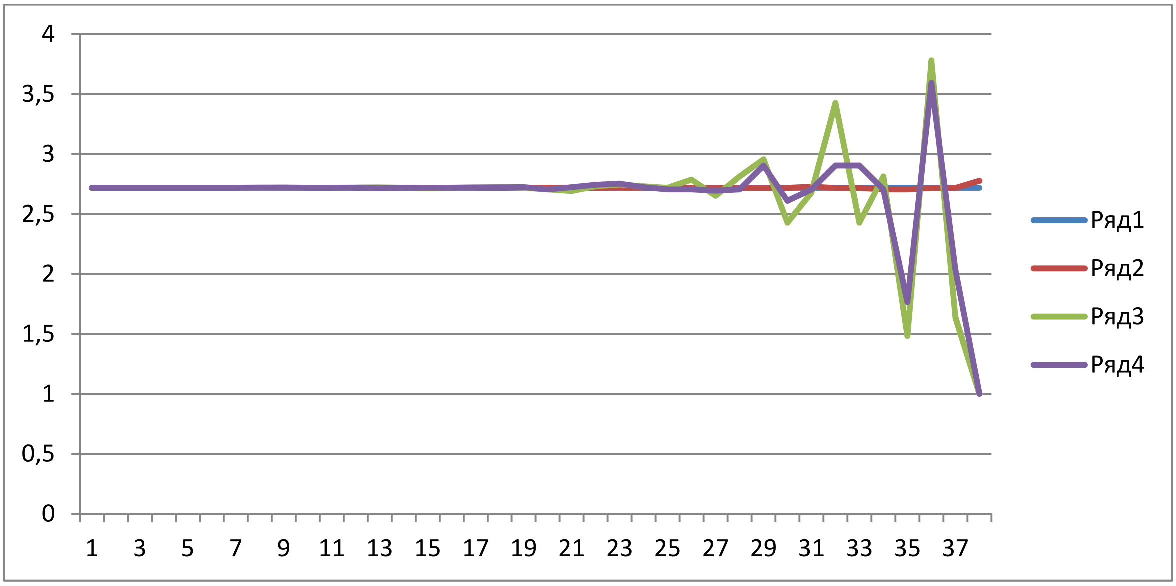
Таблица 6.

N	e	$\mathbf{E = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N}$	$\mathbf{E = 2^{N*\log_2\left(1+\frac{1}{N}\right)}}$	$\mathbf{E = e^{N*\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)}}$
1,00E+10	2,718282	2,718282	2,718265	2,718234
2,00E+10	2,718282	2,718282	2,718265	2,71833
3,00E+10	2,718282	2,718282	2,717863	2,718137
4,00E+10	2,718282	2,718282	2,718265	2,71833
5,00E+10	2,718282	2,718282	2,718399	2,718523
6,00E+10	2,718282	2,718282	2,718265	2,718137

7,00E+10	2,718282	2,718276	2,717729	2,718234
8,00E+10	2,718282	2,718282	2,718265	2,718717
9,00E+10	2,718282	2,718282	2,71947	2,718717
1,00E+11	2,718282	2,718282	2,717729	2,717558
2,00E+11	2,718282	2,718282	2,717729	2,717558
3,00E+11	2,718282	2,718282	2,719068	2,717558
4,00E+11	2,718282	2,718282	2,720408	2,715628
5,00E+11	2,718282	2,718222	2,717729	2,718523
6,00E+11	2,718282	2,718282	2,715054	2,717558
7,00E+11	2,718282	2,718403	2,717729	2,717558
8,00E+11	2,718282	2,718041	2,720408	2,719489
9,00E+11	2,718282	2,718282	2,723089	2,720456
1,00E+12	2,718282	2,718523	2,717729	2,723357
2,00E+12	2,718282	2,718523	2,704377	2,704075
3,00E+12	2,718282	2,71792	2,69109	2,723357
4,00E+12	2,718282	2,718523	2,731147	2,742776
5,00E+12	2,718282	2,719127	2,744632	2,752538
6,00E+12	2,718282	2,719731	2,731147	2,723357
7,00E+12	2,718282	2,716713	2,717729	2,704075
8,00E+12	2,718282	2,718523	2,785486	2,704075
9,00E+12	2,718282	2,71611	2,651621	2,694485
1,00E+13	2,718282	2,71611	2,813059	2,704075
2,00E+13	2,718282	2,71611	2,955074	2,903202
3,00E+13	2,718282	2,71611	2,426668	2,609693
4,00E+13	2,718282	2,728199	2,677869	2,704075
5,00E+13	2,718282	2,71611	3,4256	2,903202
6,00E+13	2,718282	2,71611	2,426668	2,903202
7,00E+13	2,718282	2,704075	2,813059	2,704075
8,00E+13	2,718282	2,704075	1,482913	1,7655
9,00E+13	2,718282	2,71611	3,780207	3,592962
1,00E+14	2,718282	2,71611	1,63642	2,035095
2,00E+14	2,718282	2,777094	1	1

Примечание: жёлтым цветом выделены значения **E > e**, красным цветом - значения **E = 1**, синим цветом - значения **E < 2**.

График 8.



Таким образом, значения «числа» е не равны общепринятому значению.

3.3. Проверка значений второго замечательного предела при помощи корней.

Выполним ещё одну проверку.

Так как второй замечательный предел: $\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N} = 2,718281828459050 = \mathrm{e}$,

то $\sqrt[N]{\mathrm{e}} = \left(1+\frac{1}{N}\right)$, $\sqrt[N]{\boldsymbol{E}} = \left(1+\frac{1}{N}\right)$, при N → ∞, е = **E**, соответственно, должно быть: $\sqrt[N]{\mathrm{e}} = \sqrt[N]{\boldsymbol{E}}$.

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\sqrt[N]{\boldsymbol{E}}-1}$$

Вычислим значения **E**, е, $\sqrt[n]{E}$, $\sqrt[n]{\mathrm{e}}$ и значения $\sqrt[n]{N}$ при значениях **N** → ∞.

Результаты сведём в таблицу 7.

Таблица 7.

N	E = (1 + 1 / N) ^ N	е	ⁿ√ N	ⁿ√ E	ⁿ√ е
1	2	2,718281828	1	2	2,718281828
10	2,59374246	2,718281828	1,258925412	1,1	1,105170918
100	2,70481382	2,718281828	1,047128548	1,01	1,010050167
1000	2,716923932	2,718281828	1,006931669	1,00100000	1,00100050
10000	2,718145927	2,718281828	1,000921458	1,00010000	1,00010001
100000	2,718268237	2,718281828	1,000115136	1,00001000	1,00001000
1000000	2,718280469	2,718281828	1,000013816	1,00000100	1,00000100

10000000	2,718281694	2,718281828	1,000001612	1,00000010	1,00000010
100000000	2,718281786	2,718281828	1,000000184	1,00000001	1,00000001
1000000000	2,718282031	2,718281828	1,000000021	1,000000001	1,000000001
1E+10	2,718282053	2,718281828	1,0000000023	1	1
1E+11	2,718282053	2,718281828	1,0000000003	1	1
1E+12	**2,718523496**	**2,718281828**	**1**	**1**	**1**
1E+13	2,716110034	2,718281828	1	1	1
1E+14	2,716110034	2,718281828	1	1	1
1E+15	3,035035207	2,718281828	1	1	1
1E+16	1	2,718281828	1	1	1
1E+17	1	2,718281828	1	1	1

Примечание: жёлтым цветом выделены значения **E** > e**,** синим цветом - значения ^{n}√ **E**, ^{n}√ **N** и ^{n}√ e, при которых они равны **1**, красным цветом – значения **E = 1**.

При всех **N** должно выполняться равенство: $\boldsymbol{N} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[N]{E}-\mathbf{1}}$, однако уже при значениях **N ≥ 10000000**, равенство не выполняется.

Зато, при возведении ^{n}√ **E** в степень **1 / (**^{n}√ **E -1)** при **N ≥ 10000000000** появляется число e **:**

$$E^{\frac{1}{\sqrt[N]{E}-1}} = e\,.$$

Таблица 8.

N	1 / (^{n}√ E -1)	e	E	(^{n}√ E)^(N)	(^{n}√ E)^(1 / (^{n}√ E -1))
1	1	2,718281828	2	2	2
10	10	2,718281828	2,59374246	2,59374246	2,59374246
100	100	2,718281828	2,704813829	2,704813829	2,704813829
1000	1000	2,718281828	2,716923932	2,716923932	2,716923932
10000	10000	2,718281828	2,718145927	2,718145927	2,718145927
100000	100000	2,718281828	2,718268237	2,718268237	2,718268237
1000000	**1000000**	**2,718281828**	**2,718280469**	**2,718280469**	**2,718280469**
10000000	9999999,994	2,718281828	2,718281694	2,718281694	2,718281693
100000000	100000000,6	2,718281828	2,718281786	2,718281786	2,718281815
1000000000	999999917,3	2,718281828	2,718282031	2,718282031	2,718281827
10000000000	9999999173	2,718281828	2,718282053	2,718282053	2,718281828
1E+11	99999991726	2,718281828	2,718282053	2,718282053	2,718281828
1E+12	9,99911E+11	2,718281828	2,718523496	2,718523496	2,718281828
1E+13	1,0008E+13	2,718281828	2,716110034	2,716110034	2,718281828
1E+14	1,0008E+14	2,718281828	2,716110034	2,716110034	2,718281828
1E+15	#ДЕЛ/0!	2,718281828	3,035035207	3,035035207	#ДЕЛ/0!

Примечание: жёлтым цветом выделены значения **E** > е**,** зелёным цветом – значения **(ⁿ√ E)** $^{(1 / (^{n}\sqrt{E} - 1))}$ равные е, красным цветом значения **1 / (ⁿ√ E -1)** не равные **N**.

Таким образом, члены последовательности **E** не равны е**,** только при возведении их в степень $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[N]{\boldsymbol{E}}-\mathbf{1}}$, они становятся равными е **:**

$E^{\frac{1}{\sqrt[N]{E}-1}} =$ е.

3.4. Доказательство равенства значений второго замечательного предела единице.

Для доказательства равенства значений второго предела единице воспользуемся основами тригонометрической теории чисел или волновой арифметики.

Рассмотрим спираль Феодора Киренского в прямоугольной (декартовой) системе координат.

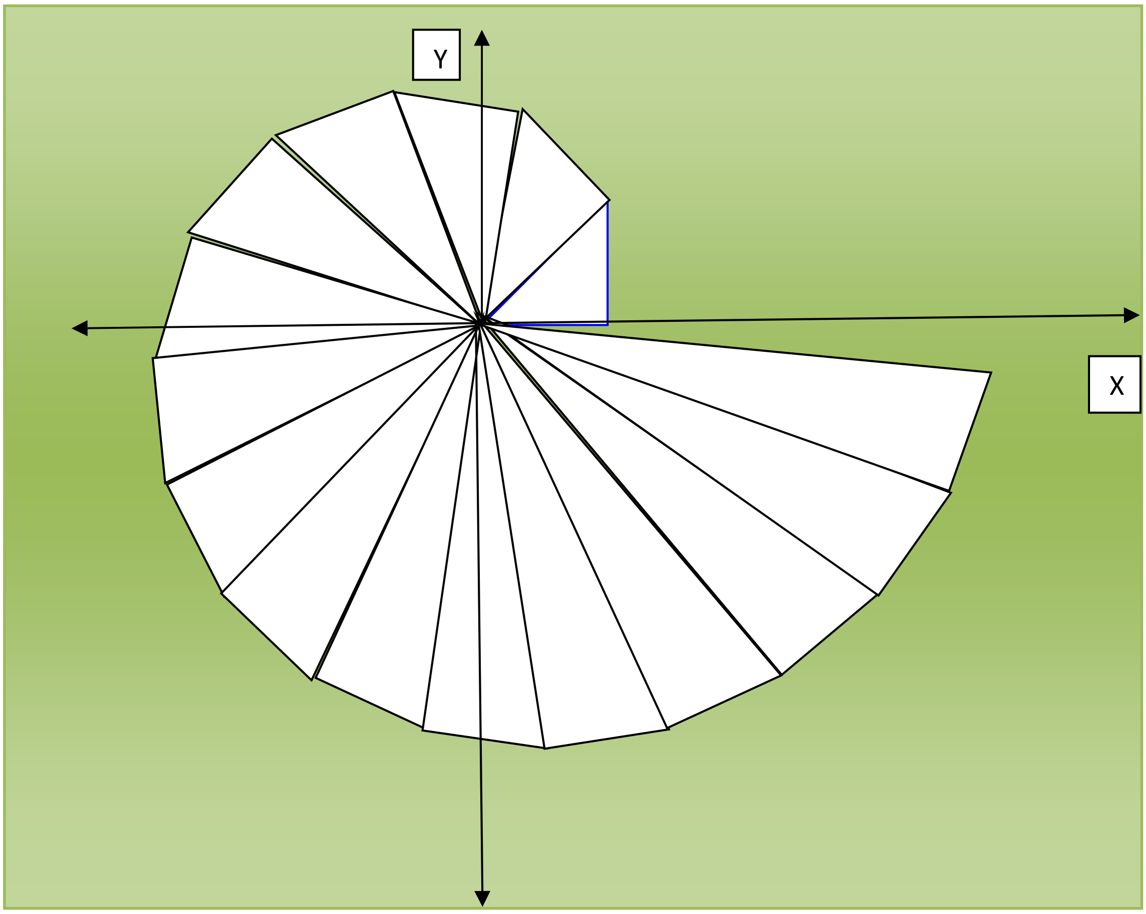


Рисунок № 1. Спираль Феодора Киренского.

Гипотенузы прямоугольных треугольников, из которых состоит спираль, равны квадратному корню из натуральных чисел от единицы до бесконечности, один из катетов всегда равен единице, второй катет последующего треугольника всегда является гипотенузой предыдущего треугольника.

Спираль Феодора Киренского наглядно показывает существование иррациональных чисел, квадратами которых являются натуральные числа, и трансцендентных чисел-углов в треугольниках, которые можно построить, но невозможно точно вычислить.

Спираль Феодора Киренского даёт возможность создать новый раздел математики – новую теорию чисел, тригонометрическую теорию чисел или волновую арифметику на основе элементарной арифметики, элементарной алгебры, геометрии и тригонометрии.

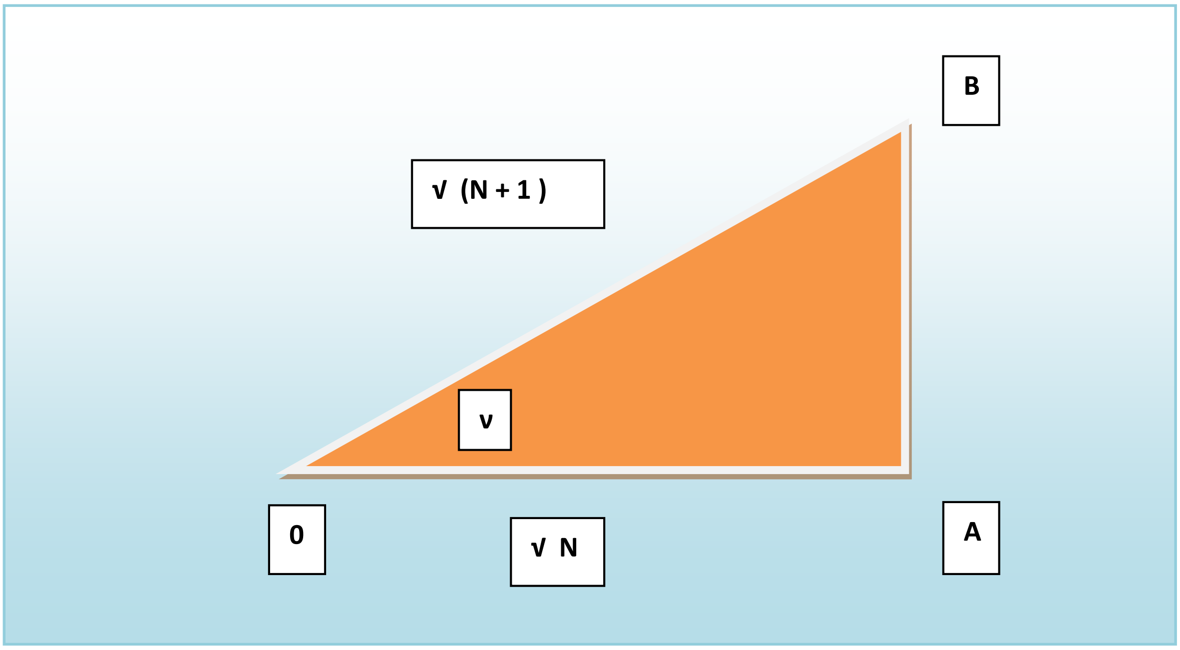


Рисунок 2. Треугольник.

Рассмотрим какой-либо прямоугольный треугольник (рисунок № 2) из спирали Феодора Киренского.

Будем считать, что катет AB равен **1**.

Катет 0A равен √**N**, где **N** – числа натурального ряда.

На основании теоремы Пифагора гипотенуза 0B равна √**(N + 1)**.

Угол, лежащий напротив катета AB, назовём углом **ν** (ню).

Тогда тангенс угла ν равняется: $\boldsymbol{tg\,\nu = \frac{1}{\sqrt{N}}}$.

Синус угла ν равняется: $\boldsymbol{sin\,\nu = \frac{1}{\sqrt{N+1}}}$.

Косинус угла ν равняется: $\boldsymbol{\cos \nu = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N+1}}}$.

Если **N**i – любое натуральное число, то на основании любого треугольника спирали Феодора Киренского получаются простые формулы – **тригонометрические формулы чисел:**

$$\boldsymbol{tg\,\nu_i = \frac{1}{\sqrt{N_i}}}$$

$$\boldsymbol{ctg\,\nu_i = \sqrt{N_i}}$$

$$\boldsymbol{\sin \nu_i = \frac{1}{\sqrt{N_i+1}}}$$

$$\boldsymbol{\cos \nu_i = \frac{\sqrt{N_i}}{\sqrt{N_i+1}}} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\boldsymbol{\nu_i = Arctg\,(\frac{1}{\sqrt{N_i}});} \qquad \textbf{(5)}$$

$\boldsymbol{(ctg\,\nu_i)^2 = N_i}$, то есть квадрат котангенса угла ν_i равняется числу N_i .

И, наоборот, каждому числу **N**i соответствует значение тригонометрической функции угла **ν**i **.**

$$\mathbf{N_i} = \left(\frac{1}{tg\,\nu_i}\right)^2$$

При **N** → ∞, угол **ν** → **0.**

При **N = 1**, угол **ν = π/4**, или **45°.**

При **N** → **0**, угол **ν** → **π/2**, или **90°.**

Формулу второго замечательного предела: $\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = e$, преобразуем согласно полученных формул:

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{(ctg\,\nu_i)^2}\right)^{(ctg\,\nu_i)^2} = \lim_{\nu\to 0}(1+(tg\,\nu_i)^2)^{(ctg\,\nu_i)^2} = \lim_{\nu\to 0}(1+(tg\,\nu_i)^2)^N = \lim_{\nu\to 0}\left(\frac{1}{(\cos \nu_i)^2}\right)^N$$

При **N = 1, ν = π/4**, значение второго замечательного предела равно:

$$\left(\frac{1}{(\cos \nu)^2}\right)^N = \left(\frac{1}{(\cos\frac{\pi}{4})^2}\right)^1 = \left(\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\right)^1 = 2$$

При **N = ∞, ν = 0**, значение второго замечательного предела равно:

$\left(\frac{1}{(\cos\nu)^2}\right)^N = \left(\frac{1}{(\cos 0)^2}\right)^\infty = \left(\frac{1}{(1)^2}\right)^\infty = \mathbf{1}$, так как единица в любой степени, включая даже бесконечность, равна единице:

1^∞ = 1*1*1*1*1*1*……….*1 = 1

Таким образом, предельное значение второго замечательного предела равно **единице**, а не числу е.

4. Расчёт производных «числа» е.

Классическое определение производной функции: производной функции y = f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

В нашем случае:

$$(E)' = \frac{E_{(N+\Delta x)} - E_{(N)}}{\Delta x} = \frac{\left(1+\frac{1}{N+\Delta x}\right)^{N+\Delta x} - \left(1+\frac{1}{N}\right)^N}{\Delta x} = \frac{\Delta E}{\Delta x}$$

где **N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, … ,** ∞.

ΔX = 0,1; **0,01**; **0,001**; **0,0001** и так далее.

Вычислим фактические значения производных.

4.1. Фактическое значение производных для ряда $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Ранее (таблица 1) было получено, что при числе **N**, равном **17**:

$e = \sum_{n=0}^{17} \frac{1}{17!}$ = **2,718281828459050**, то есть сумма ряда действительно стремится к предельному числу и имеет предел, который и называется числом е.

Вычислять производные будем при **N = 18**.

ΔX будет принимать значения **0,1**; **0,01**; **0,001**; **0,0001**; **0,00001**; **0,000001** и так далее.

Вычисления представим в таблице 9.

Таблица 9.

ΔX	Σ ряда	е	Δ = Σ - е	е′= Δ / ΔX	е′/ е	е′- е
0,1	3,00416602	2,71828183	0,28588420	2,85884195	1,05170918	0,14056013

0,01	2,74560102	2,71828183	0,02731919	2,73191866	1,00501671	0,01363683
0,001	2,72100147	2,71828183	0,00271964	2,71964142	1,00050017	0,00135959
0,0001	2,71855367	2,71828183	0,00027184	2,71841775	1,00005000	0,00013592
0,00001	2,71830901	2,71828183	0,00002718	2,71829542	1,00000500	0,00001359
0,000001	2,71828455	2,71828183	0,00000272	2,71828319	1,00000050	0,00000136
0,0000001	**2,71828210**	**2,71828183**	**0,00000027**	**2,71828196**	**1,00000005**	**0,00000013**
0,00000001	2,71828195	2,71828183	0,00000012	11,71828177	4,31091495	8,99999994
1E-09	2,71828184	2,71828183	0,00000001	11,71828190	4,31091500	9,00000007
1E-10	2,71828183	2,71828183	0,00000000	11,71827968	4,31091418	8,99999785
1E-11	2,71828183	2,71828183	0,00000000	11,71822639	4,31089458	8,99994456
1E-12	2,71828183	2,71828183	0,00000000	11,71818198	4,31087824	8,99990015

Примечание: жёлтым цветом показаны значения производных функции $(e)'$, которые гораздо больше e.

Таким образом, при $\Delta X \leq 0{,}00000001$, производные $(e)'$перестают быть равными e:

$(e)'$ = **11,71828177**, вместо e = **2,718281828459050**,

$(e)'/\,e$ = **4,31091495**,

$(e)'$**-** e = **8,99999994**.

4.2. Фактическое значение производных для второго замечательного предела .

$$(E)' = \frac{E_{(N+\Delta x)} - E_{(N)}}{\Delta x} = \frac{\left(1+\frac{1}{N+\Delta x}\right)^{N+\Delta x} - \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}}{\Delta x} = \frac{\Delta E}{\Delta x}$$

где **N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, … ,** ∞.

ΔX = 0,1; **0,01**; **0,001**; **0,0001** и так далее.

Вычислим фактические значения производных.

Расчёты будем вести табличным способом.

Таблица 10.

N	ΔE / ΔX	ΔE / ΔX	ΔE / ΔX	ΔE / ΔX	ΔE / ΔX
	ΔX = 0,1	ΔX = 0,01	ΔX = 0,001	ΔX = 0,0001	ΔX = 0,0001
1	0,36616559	0,384179427	0,386081788	0,386273093	0,386292234
2	0,156824369	0,161732014	0,162239867	0,162290829	0,162295927
3	0,08707761	0,089090977	0,089297466	0,089318167	0,089320238
4	0,055370689	0,056387515	0,05649126	0,056501656	0,056502695
5	0,038304702	0,038888417	0,03894777	0,038953715	0,03895431
6	0,028071216	0,028436864	0,028473954	0,028477668	0,028478039
7	0,021453687	0,021697729	0,02172244	0,021724914	0,021725161
8	0,016928591	0,017099516	0,017116798	0,017118528	0,017118701

9	0,013698135	0,013822473	0,013835031	0,013836288	0,013836414
10	0,011311575	0,011404834	0,011414245	0,011415186	0,01141528
20	0,003092532	0,003105836	0,003107172	0,003107306	0,003107319
30	0,001417506	0,001421631	0,001422045	0,001422087	0,001422089
40	0,0008099	0,000811681	0,000811859	0,000811877	0,00081188
50	0,000523251	0,000524176	0,000524268	0,000524278	0,000524279
60	0,000365672	0,000366213	0,000366267	0,000366272	0,000366272
70	0,000269876	0,000270219	0,000270253	0,000270257	0,000270259
80	0,000207329	0,000207559	0,000207582	0,000207585	0,000207587
90	0,00016425	0,000164413	0,000164429	0,000164431	0,00016443
100	0,000133325	0,000133444	0,000133456	0,000133458	0,000133459
200	3,36525E-05	3,36676E-05	3,36692E-05	3,367E-05	3,36819E-05
300	1,50047E-05	1,50092E-05	1,50097E-05	1,50095E-05	1,50076E-05
400	8,45373E-06	8,45562E-06	8,45588E-06	8,4559E-06	8,45422E-06
500	5,41561E-06	5,41659E-06	5,41685E-06	5,41847E-06	5,41918E-06
600	3,76326E-06	3,7638E-06	3,76387E-06	3,76225E-06	3,75837E-06
700	2,76611E-06	2,76649E-06	2,7667E-06	2,76981E-06	2,77263E-06
800	2,11853E-06	2,1188E-06	2,11861E-06	2,12049E-06	2,10627E-06
900	1,67435E-06	1,67455E-06	1,67471E-06	1,67373E-06	1,672E-06
1000	1,35652E-06	1,3567E-06	1,3568E-06	1,36291E-06	1,36366E-06
2000	3,39461E-07	3,3943E-07	3,39738E-07	3,37796E-07	3,24318E-07
3000	1,50912E-07	1,5086E-07	1,50088E-07	1,46239E-07	1,05027E-07
4000	8,49041E-08	8,48305E-08	8,45661E-08	7,16138E-08	1,29674E-08
5000	5,43504E-08	5,44087E-08	5,40754E-08	6,51879E-08	1,75326E-07
6000	3,77522E-08	3,76086E-08	3,69744E-08	3,11484E-08	-2,78E-08
7000	2,771E-08	2,76594E-08	2,50431E-08	3,61755E-08	1,46994E-07
8000	2,12604E-08	2,15711E-08	2,54619E-08	2,19647E-08	4,21085E-07
9000	1,6783E-08	1,66147E-08	1,8709E-08	3,66596E-08	2,15872E-07
10000	1,35698E-08	1,39551E-08	1,41087E-08	-4,88498E-09	2,87725E-07
20000	3,31586E-09	3,37392E-09	3,93552E-09	-3,12195E-09	-4,35918E-07
30000	1,50918E-09	9,37339E-10	-3,8507E-09	2,04281E-08	-4,61098E-07
40000	8,6867E-10	1,56728E-09	1,42819E-08	6,88516E-08	-1,0969E-07
50000	6,64122E-10	1,05476E-09	7,00995E-09	-2,40696E-08	-6,36602E-07
60000	2,7935E-10	1,77014E-10	-1,51967E-09	-3,44476E-07	-1,96332E-06
70000	3,34639E-10	6,52145E-10	7,5584E-09	-7,93143E-09	1,10467E-06
80000	1,59632E-10	7,34346E-10	-3,5536E-09	2,91527E-07	1,31091E-06
90000	3,52474E-11	-8,02958E-10	-9,48353E-09	-3,13607E-07	-3,35483E-06
100000	5,417E-11	-2,80642E-09	-4,37259E-08	-3,04512E-08	-3,5191E-06
200000	6,19194E-11	-8,16325E-10	-4,58744E-08	3,48548E-07	1,87841E-06
300000	-9,29878E-11	6,21379E-09	-3,17435E-09	-9,70601E-08	-1,00895E-05
400000	2,72522E-09	2,05583E-08	1,26445E-07	2,87532E-06	1,58783E-05
500000	-1,28112E-09	8,4007E-09	4,48508E-08	-1,94222E-07	9,48659E-06
600000	1,10401E-10	4,70233E-09	-1,66673E-07	1,01675E-06	5,608E-06
700000	6,74132E-10	-1,38041E-09	1,04821E-07	-1,00693E-07	6,29434E-06
800000	2,56363E-09	1,02327E-08	-5,7939E-08	2,64038E-06	-4,17679E-06
900000	5,64127E-11	-2,11742E-08	-2,33483E-07	-2,35658E-06	3,5735E-06

1000000	1,567E-09	-3,89342E-09	2,43289E-07	2,11154E-06	-3,34914E-06
2000000	-6,28731E-09	-1,02831E-07	1,81695E-08	2,10143E-08	-1,20221E-05
3000000	3,10543E-09	2,45352E-08	-6,66536E-07	3,28718E-06	2,4717E-05
4000000	7,87679E-09	-1,56861E-09	1,11114E-06	4,99523E-06	4,38362E-05
5000000	8,40266E-10	2,45923E-07	5,84226E-07	9,49347E-07	4,60054E-06
6000000	-1,35868E-08	1,32483E-07	8,68888E-07	4,61145E-06	4,20371E-05
7000000	1,00848E-09	-1,04802E-07	-3,17897E-07	-6,67391E-06	-7,0234E-05
8000000	1,5025E-08	4,72229E-07	1,66423E-06	1,35842E-05	0,000132784
9000000	-3,16037E-08	-3,1821E-07	-4,68166E-07	-7,39993E-06	-7,67176E-05
10000000	-2,84446E-08	-3,16581E-07	4,23537E-07	1,78892E-06	1,54428E-05
20000000	3,24128E-08	3,08061E-07	1,85738E-06	1,73506E-05	0,000172283
30000000	-8,41887E-08	1,53367E-07	7,18189E-07	6,36641E-06	6,28486E-05
40000000	-1,78705E-07	1,56558E-08	-4,55055E-07	-5,16216E-06	-5,22332E-05
50000000	-2,63782E-07	-1,09207E-07	-1,58136E-06	-1,63029E-05	-0,000163519
60000000	9,70494E-08	5,62752E-07	5,21978E-06	5,17901E-05	0,000517493
70000000	-4,51761E-07	-6,42046E-07	-6,76995E-06	-6,8049E-05	-0,000680839
80000000	-4,27909E-08	-7,33716E-07	-7,64296E-06	-7,67355E-05	-0,00076766
90000000	-7,19667E-08	-9,91495E-07	-1,01868E-05	-0,00010214	-0,001021668
100000000	1,46698E-07	1,22234E-06	1,19787E-05	0,000119543	0,001195183
200000000	2,01064E-07	1,88832E-06	1,87609E-05	0,000187486	0,00187474
300000000	1,1847E-07	1,10315E-06	1,09499E-05	0,000109418	0,001094095
400000000	2,28247E-07	2,22131E-06	2,21519E-05	0,000221458	0,002214518
500000000	2,03741E-07	1,98848E-06	1,98358E-05	0,000198309	0,001983045
600000000	1,36494E-07	1,32417E-06	1,32009E-05	0,000131968	0,001319641
700000000	9,16669E-08	8,8172E-07	8,78225E-06	8,77876E-05	0,000877841
800000000	2,41524E-07	2,38466E-06	2,3816E-05	0,00023813	0,002381266
900000000	2,69861E-07	2,67143E-06	2,66871E-05	0,000266844	0,002668411
1000000000	2,14689E-07	2,12242E-06	2,11998E-05	0,000211973	0,002119708
2000000000	2,20125E-07	2,18902E-06	2,1878E-05	0,000218768	0,002187663
3000000000	1,80733E-08	1,72578E-07	1,71762E-06	1,71681E-05	0,000171673
4000000000	2,22844E-07	2,22232E-06	2,22171E-05	0,000222165	0,002221641
5000000000	5,43658E-10	5,43654E-10	5,44009E-10	5,4623E-10	4,88498E-10
6000000000	4,53055E-10	4,5306E-10	4,53415E-10	4,52971E-10	4,44089E-10
7000000000	3,88329E-10	3,88356E-10	3,88578E-10	3,90799E-10	3,55271E-10
8000000000	3,39786E-10	3,39728E-10	3,39728E-10	3,37508E-10	0
9000000000	3,0203E-10	3,02025E-10	3,01537E-10	3,01981E-10	0
10000000000	2,71827E-10	2,71827E-10	2,71339E-10	2,70894E-10	0
20000000000	1,35914E-10	1,35936E-10	1,35891E-10	1,33227E-10	0
30000000000	9,06075E-11	9,05942E-11	9,05942E-11	8,88178E-11	0
40000000000	6,7959E-11	6,79901E-11	6,83897E-11	6,66134E-11	0
50000000000	5,43654E-11	5,43565E-11	5,41789E-11	5,32907E-11	0
60000000000	4,5306E-11	4,53415E-11	4,52971E-11	4,44089E-11	0
70000000000	3,88356E-11	3,88134E-11	3,95239E-11	4,44089E-11	0
80000000000	3,39773E-11	3,39284E-11	3,37508E-11	3,55271E-11	0
90000000000	3,02025E-11	3,01981E-11	3,01981E-11	0	0
1E+11	2,71827E-11	2,71339E-11	2,70894E-11	0	0

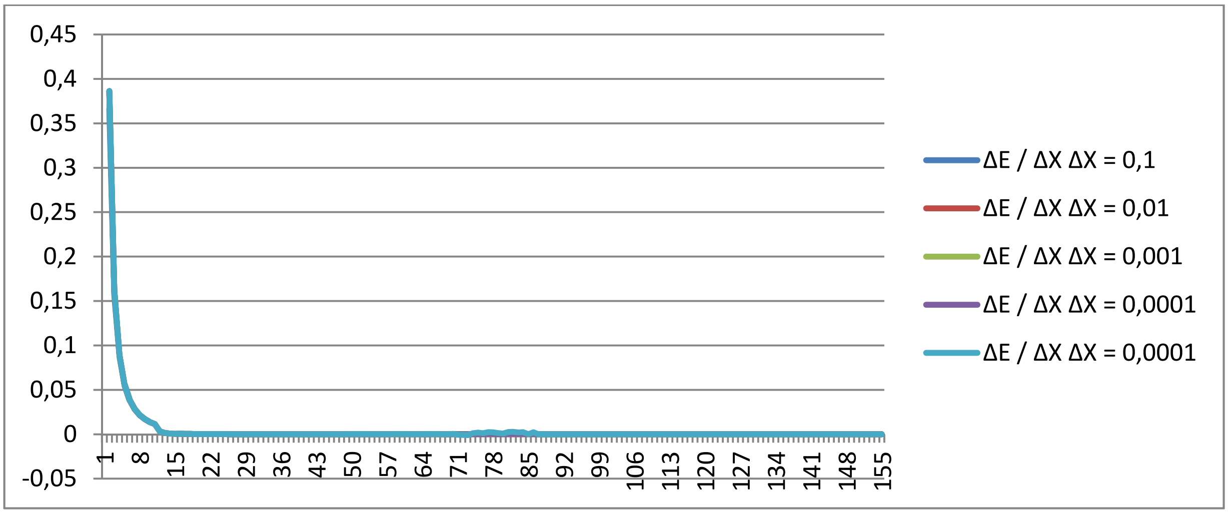
2E+11	1,35936E-11	1,36779E-11	1,42109E-11	0	0
3E+11	9,05942E-12	9,05942E-12	9,32587E-12	0	0
4E+11	6,79012E-12	6,79456E-12	6,66134E-12	0	0
5E+11	5,43121E-12	5,4623E-12	5,32907E-12	0	0
6E+11	4,53415E-12	4,52971E-12	4,88498E-12	0	0
7E+11	3,8769E-12	3,86358E-12	3,55271E-12	0	0
8E+11	3,39728E-12	3,41949E-12	0	0	0
9E+11	3,01981E-12	3,01981E-12	0	0	0
1E+12	2,71783E-12	2,75335E-12	0	0	0
2E+12	1,35891E-12	1,37668E-12	0	0	0
3E+12	9,10383E-13	9,32587E-13	0	0	0
4E+12	6,83897E-13	6,66134E-13	0	0	0
5E+12	5,41789E-13	5,32907E-13	0	0	0
6E+12	4,52971E-13	4,44089E-13	0	0	0
7E+12	3,86358E-13	3,9968E-13	0	0	0
8E+12	3,37508E-13	3,55271E-13	0	0	0
9E+12	2,9754E-13	0	0	0	0
1E+13	2,70894E-13	0	0	0	0
2E+13	1,37668E-13	0	0	0	0
3E+13	9,32587E-14	0	0	0	0
4E+13	7,54952E-14	0	0	0	0
5E+13	5,77316E-14	0	0	0	0
6E+13	4,44089E-14	0	0	0	0
7E+13	3,9968E-14	0	0	0	0
8E+13	0	0	0	0	0
9E+13	0	0	0	0	0
1E+14	0	0	0	0	0
2E+14	0	0	0	0	0
3E+14	0	0	0	0	0
4E+14	0	0	0	0	0
5E+14	0	0	0	0	0
6E+14	0	0	0	0	0
7E+14	0	0	0	0	0
8E+14	0	0	0	0	0
9E+14	0	0	0	0	0
1E+15	0	0	0	0	0
2E+15	0	0	0	0	0
3E+15	0	0	0	0	0
4E+15	0	0	0	0	0
5E+15	0	0	0	0	0
6E+15	0	0	0	0	0
7E+15	0	0	0	0	0
8E+15	0	0	0	0	0
9E+15	0	0	0	0	0
1E+16	0	0	0	0	0
2E+16	0	0	0	0	0

3E+16	0	0	0	0	0
4E+16	0	0	0	0	0
5E+16	0	0	0	0	0
6E+16	0	0	0	0	0
7E+16	0	0	0	0	0
8E+16	0	0	0	0	0
9E+16	0	0	0	0	0
1E+17	0	0	0	0	0

Таким образом, при увеличении **N** производная **(E)′** стремится к нулю, кроме того, при уменьшении значений **ΔX**, нулевые значения производных **(E)′ = 0** начинаются с меньших значений чисел N.

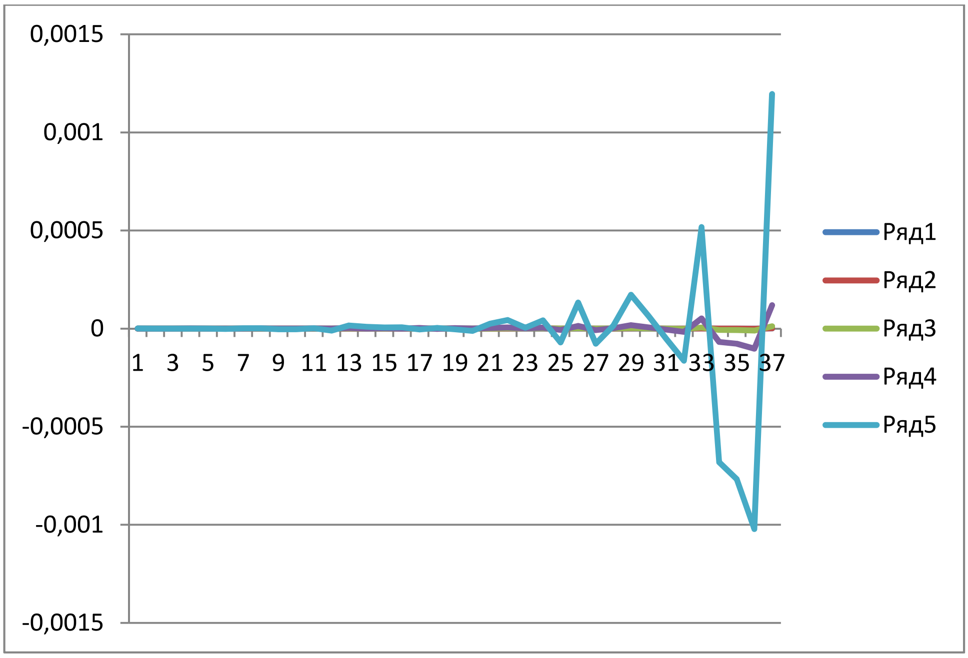
Данные таблицы 10 представлены на графике 9.

График 9.



Для большей наглядности представлен график 9 на основании данных таблицы 7 при интервале чисел **N** от **10^4** до **10^8**.

График 10.



Вывод: таким образом, значения производной «числа» е при **N → ∞** приближаются к нулю, а не к числу е, что не соответствует общепринятому значению.

4.3. Доказательство общепринятого значения производной числа е.

Докажем, что $y' = e^{x}$.

Считается, что $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Придав приращение аргументу **Δx**, найдём приращение функции **Δy**:

$\Delta\mathbf{y} = e^{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}} - e^{x} = e^{x} * (e^{\Delta\mathbf{x}} - \mathbf{1})$.

Тогда, $\frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta \mathbf{x}} = \frac{e^{x} * (e^{\Delta\mathbf{x}}-\mathbf{1})}{\Delta\mathbf{x}}$.

Таким образом, $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x} * (e^{\Delta\mathbf{x}}-\mathbf{1})}{\Delta\mathbf{x}} = e^{x} * \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{\Delta\mathbf{x}}-\mathbf{1})}{\Delta\mathbf{x}} = e^{x} * \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$.

Чтобы раскрыть неопределённость $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, сделаем подстановку: $k = e^{\Delta\mathbf{x}} - \mathbf{1}$,

Тогда: $e^{\Delta\mathbf{x}} = k + \mathbf{1}$

$\Delta\mathbf{x} = \ln(\mathbf{k}+\mathbf{1})$

$y' = e^{x} * \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(e^{\Delta\mathbf{x}}-\mathbf{1})}{\Delta\mathbf{x}} = e^{x} * \lim\limits_{k\to 0}\frac{\mathbf{k}}{\ln(\mathbf{k}+\mathbf{1})}$.

Выполним вторую подстановку: $n = \frac{1}{k}$, тогда $k = \frac{1}{n}$, при $k \geq 0$, $\mathbf{n}\to\infty$.

$y' = \mathrm{e}^{x} * \lim\limits_{k\to 0}\frac{\mathbf{k}}{\ln(\mathbf{k+1})} = \mathrm{e}^{x} * \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{ln\left(\frac{1}{n}+1\right)} = \mathrm{e}^{x} * \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n*ln\left(\frac{1}{n}+1\right)} =$ $= \mathrm{e}^{x} *$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{ln\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n}} = \mathrm{e}^{x} * \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{ln\,\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{x} * \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1} = \mathrm{e}^{x}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что $(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$, или производная функции равна самой функции.

4.4. Опровержение общепринятого значения производной числа e.

1. Определим значение Δx, при котором $(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$.

Имеем: производная функции равна самой функции:

$$(\mathrm{e}^{x})' = y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}*(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^{x} * \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^{x} * \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{0} = \mathrm{e}^{x}.$$

$(\mathrm{e}^{x})' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}*(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^{x}$, или $\frac{\mathrm{e}^{x}*(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^{x}$.

Отсюда: $(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1) = \Delta x$, или $\mathrm{e}^{\Delta x} = \Delta x + 1$.

Прологарифмируем выражение: $\ln \mathrm{e}^{\Delta x} = \ln(\Delta x + 1)$,

$\Delta x * \ln \mathrm{e} = \ln(\Delta x + 1)$, или $\Delta x * 1 = \ln(\Delta x + 1)$

Таким образом, только при значении **Δx = 0**, $\ln(\Delta x + 1) = 0$, следовательно, только при **Δx = 0,** производная $(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$.

2. Будем считать, что:

$$(\mathrm{e}^{x})' = y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}*(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^{x} * \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^{x} * \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{0} = 0.$$

$(\mathrm{e}^{x})' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}*(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = 0$, или $\frac{\mathrm{e}^{x}*(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = 0$.

Отсюда: $\mathrm{e}^{x} * (\mathrm{e}^{\Delta x} - 1) = 0$, или $\mathrm{e}^{\Delta x} - 1 = 0$, и $\mathrm{e}^{\Delta x} = 1$.

Прологарифмируем выражение: $\ln \mathrm{e}^{\Delta x} = \ln 1$,

$\Delta x * \ln \mathrm{e} = 0$.

Таким образом, только при значении **Δx = 0**, производная $(\mathrm{e}^{x})' = 0$.

3. Будем считать, что:

$$(\mathrm{e}^{x})' = y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}*(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^{x} * \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^{x} * \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{0} = n * \mathrm{e}^{x}$$, где

n – любое действительное число, кроме нуля.

$(\mathrm{e}^{x})' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} * (\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \boldsymbol{n} * \mathrm{e}^{x}$, или $\frac{\mathrm{e}^{x} * (\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \boldsymbol{n} * \mathrm{e}^{x}$.

Отсюда: $(\mathrm{e}^{\Delta x} - \mathbf{1}) = \boldsymbol{n} * \Delta\mathbf{x}$, или $\mathrm{e}^{\Delta x} = \mathbf{n} * \Delta\mathbf{x} + \mathbf{1}$ **.**

Прологарифмируем выражение: $\ln \mathrm{e}^{\Delta x} = \ln(\mathbf{n} * \Delta\mathbf{x} + 1)$,

$\Delta\mathbf{x} * \mathbf{ln}\, \mathrm{e} = \ln(\mathbf{n} * \Delta\mathbf{x} + 1)$, или $\Delta\mathbf{x} * \mathbf{1} = \ln(\mathbf{n} * \Delta\mathbf{x} + 1)$

Таким образом, только при значении **Δx = 0**, $\mathbf{ln}(\boldsymbol{n} * \Delta\mathbf{x} + \mathbf{1}) = \Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$, следовательно, только при **Δx = 0** ,производная $(\mathrm{e}^{x})' = \boldsymbol{n} * \mathrm{e}^{x}$ **.**

4. Будем считать, что:

$(\mathrm{e}^{x})' = \boldsymbol{y}' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} * (\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^{x} * \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^{x} * \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} * \mathrm{e}^{x}$, где

n – любое действительное число, кроме нуля.

$(\mathrm{e}^{x})' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} * (\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} * \mathrm{e}^{x}$, или $\frac{\mathrm{e}^{x} * (\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} * \mathrm{e}^{x}$.

Отсюда: $(\mathrm{e}^{\Delta x} - \mathbf{1}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} * \Delta\mathbf{x}$, или $\mathrm{e}^{\Delta x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} * \Delta\mathbf{x} + \mathbf{1}$ **.**

Прологарифмируем выражение: $\ln \mathrm{e}^{\Delta x} = \ln\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} * \Delta\mathbf{x} + 1\right)$,

$\Delta\mathbf{x} * \mathbf{ln}\, \mathrm{e} = \ln\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} * \Delta\mathbf{x} + 1\right)$, или $\Delta\mathbf{x} * \mathbf{1} = \ln\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} * \Delta\mathbf{x} + 1\right)$

Таким образом, только при значении **Δx = 0**, $\mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} * \Delta\mathbf{x} + \mathbf{1}\right) = \Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$, следовательно, только при **Δx = 0** , производная $(\mathrm{e}^{x})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} * \mathrm{e}^{x}$ **.**

Вывод: только при **Δx = 0** , производная $(\mathrm{e}^{x})'$ может принимать любые значения, в том числе и $(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{\boldsymbol{x}}$**,** таким образом, решение не однозначно, а многозначно. При всех других значениях **Δx** $(\mathrm{e}^{x})' \neq \mathrm{e}^{x}$.

4.5. Производные ряда $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Определим производные для ряда $\boldsymbol{E}^{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}!} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}!} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!}$

$$\boldsymbol{E}^{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}!} + \frac{\boldsymbol{x}^{1}}{\mathbf{1}!} + \frac{\boldsymbol{x}^{2}}{\mathbf{2}!} + \frac{\boldsymbol{x}^{3}}{\mathbf{3}!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{x}^{n}}{\boldsymbol{n}!}$$

$$(\boldsymbol{E}^{x})' = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}!} + \frac{\boldsymbol{x}^{1}}{\mathbf{1}!} + \frac{\boldsymbol{x}^{2}}{\mathbf{2}!} + \frac{\boldsymbol{x}^{3}}{\mathbf{3}!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{x}^{n}}{\boldsymbol{n}!}\right)'$$

$(\boldsymbol{E^x})' = \left(\frac{1}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)' = \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!} + 2 * \frac{x^1}{2!} + 3 * \frac{x^2}{3!} + \cdots + n * \frac{x^{n-1}}{n!} = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$\Delta = \boldsymbol{E^x} - (\boldsymbol{E^x})' = \frac{x^n}{n!}$

При **x=1**,

$\Delta = \boldsymbol{E^1} - (\boldsymbol{E^1})' = \frac{1^n}{n!} = \frac{1}{n!}$

$\boldsymbol{\Delta} = E_{n+1} - E_n$

Таблица 11.

N	1 / N!	E	ΔE	(E)’	Δ = E - (E)’
1	1	2		1	1
2	0,5	2,5	0,5	2	0,5
3	0,166666667	2,666666667	0,166666667	2,5	0,166666667
4	0,041666667	2,708333333	0,041666667	2,666666667	0,041666667
5	0,008333333	2,716666667	0,008333333	2,708333333	0,008333333
6	0,001388889	2,718055556	0,001388889	2,716666667	0,001388889
7	0,000198413	2,718253968	0,000198413	2,718055556	0,000198413
8	2,48016E-05	2,71827877	2,48016E-05	2,718253968	2,48016E-05
9	2,75573E-06	2,718281526	2,75573E-06	2,71827877	2,75573E-06
10	2,75573E-07	2,718281801	2,75573E-07	2,718281526	2,75573E-07
11	2,50521E-08	2,718281826	2,50521E-08	2,718281801	2,50521E-08
12	2,08768E-09	2,718281828	2,08768E-09	2,718281826	2,08768E-09
13	1,6059E-10	2,718281828	1,60591E-10	2,718281828	1,60591E-10
14	1,14707E-11	2,718281828	1,14708E-11	2,718281828	1,14708E-11
15	7,64716E-13	2,718281828	7,64722E-13	2,718281828	7,64722E-13
16	4,77948E-14	2,718281828	4,79616E-14	2,718281828	4,79616E-14
17	2,81146E-15	**2,718281828**	0	2,718281828	0
18	1,56192E-16	2,718281828	0	2,718281828	0
19	8,22064E-18	2,718281828	0	2,718281828	0
20	4,11032E-19	2,718281828	0	2,718281828	0

Таким образом: $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}' = \frac{1}{N!}$,

Соответственно, $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - \frac{1}{N!}$.

При значении **N ≥17** (зависит от мощности компьютера) можно с достаточной степенью точности считать, **E** = ℮ , и ℮ равно производной ℮’, что соответствует общепринятому значению производной ℮.

4.6. Производные второго замечательного предела: $℮ = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

4.6.1. Основные понятия.

По правилу дифференцирования сложной функции найдём производную $\boldsymbol{E} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x}$.

$$(\boldsymbol{E})' = \left(\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x}\right)' = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{x}\right)' * \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x'} = \left(\frac{-\mathbf{1}}{x^2}\right) * \boldsymbol{x} * \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x-\mathbf{1}} = \left(\frac{-\mathbf{1}}{x^2}\right) * \boldsymbol{x} * \frac{\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x}}{\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{x}\right)} =$$

$$= \frac{(-\mathbf{1})*x*x}{x^2*(x+\mathbf{1})} * \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x} = \frac{(-\mathbf{1})}{(x+\mathbf{1})} * \boldsymbol{E} .$$

Соответственно, $(\boldsymbol{E})' = \frac{(-\mathbf{1})}{(\boldsymbol{N}+\mathbf{1})} * \boldsymbol{E}$,

где **N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, … ,** ∞

и $\boldsymbol{E} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\right)^{\boldsymbol{N}}$.

Таблица 12.

N	e	E	(E)’
1	2,718281828	2	-1
10	2,718281828	2,59374246	-0,235794769
100	2,718281828	2,704813829	-0,026780335
1000	2,718281828	2,716923932	-0,00271421
10000	2,718281828	2,718145927	-0,000271787
100000	2,718281828	2,718268237	-2,71824E-05
1000000	2,718281828	2,718280469	-2,71828E-06
10000000	2,718281828	2,718281694	-2,71828E-07
100000000	2,718281828	2,718281786	-2,71828E-08
1000000000	2,718281828	2,718282031	-2,71828E-09
10000000000	2,718281828	2,718282053	-2,71828E-10
1E+11	2,718281828	2,718282053	-2,71828E-11
1E+12	2,718281828	2,718523496	-2,71852E-12
1E+13	2,718281828	2,716110034	-2,71611E-13
1E+14	2,718281828	2,716110034	-2,71611E-14
1E+15	2,718281828	3,035035207	-3,03504E-15
1E+16	2,718281828	1	-1E-16
1E+17	2,718281828	1	-1E-17

Таким образом, с увеличением N производная **(E)’** стремится к нулю.

Разложить в ряд функцию $\boldsymbol{E} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$ можно двумя способами:

1. разложение в ряд Маклорена:

$$\boldsymbol{E} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{1}!} * \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{n}*(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}!} * \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} + \frac{\boldsymbol{n}*(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})*(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})}{\mathbf{3}!} * \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}}} + \frac{\boldsymbol{n}*(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})*(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})*\ldots*(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}!} * \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{n}}}$$

$$E_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 1+\frac{n}{1}*\frac{1}{n}+\frac{n*(n-1)}{1*2}*\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{1}*\frac{1}{1}+\frac{1*(1-1)}{1*2}*\frac{1}{1^2} = 1+1+\frac{1*0}{1*2}*\frac{1}{1^2} = 2\ ;$$

$$E_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\frac{n}{1}*\frac{1}{n}+\frac{n*(n-1)}{2!}*\frac{1}{n^2}+\frac{n*(n-1)*(n-2)}{3!}*\frac{1}{n^3} = 1+\frac{2}{1}*\frac{1}{2}+\frac{2*1}{1*2}*\frac{1}{2^2}+\frac{3*2*0}{1*2*3}*\frac{1}{2^3} = 1+1+\frac{1}{4} = 2,25\ ;$$

$$E_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 1+\frac{n}{1}*\frac{1}{n}+\frac{n*(n-1)}{2!}*\frac{1}{n^2}+\frac{n*(n-1)*(n-2)}{3!}*\frac{1}{n^3}+\frac{n*(n-1)*(n-2)*(n-3)}{4!}*\frac{1}{n^4} = 1+\frac{3}{1}*\frac{1}{3}+\frac{3*(3-1)}{2!}*\frac{1}{3^2}+\frac{3*(3-1)*(3-2)}{3!}*\frac{1}{3^3}+\frac{3*(3-1)*(3-2)*(3-3)}{4!}*\frac{1}{3^4} = 1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{27} = 2,37037037\ .$$

2. по формуле бинома Ньютона (с применением коэффициентов треугольника Паскаля или биноминальных коэффицентов).

Треугольник Паскаля:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

………………………………………………………………………………………………

Биноминальные коэффициенты:

N	1	N	N*(N-1)/ 2!	N*(N-1)*(N-2)/ 3!	N*(N-1)*(N-2)*(N-3)/ 4!
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1
5	1	5	10	10	5
6	1	6	15	20	15
7	1	7	21	35	35
8	1	8	28	56	70
9	1	9	36	84	126
10	1	10	45	120	210

$$E_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 1+\frac{1}{1} = 2\ ;$$

$\boldsymbol{E_2} = \left(\mathbf{1} + \frac{1}{2}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{1} + \mathbf{2} * \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{2,25}$;

$\boldsymbol{E_3} = \left(\mathbf{1} + \frac{1}{3}\right)^{\mathbf{3}} = \mathbf{1} + \mathbf{3} * \frac{1}{3} + \mathbf{3} * \left(\frac{1}{3}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\mathbf{3}} = \mathbf{2,37037037}$, и так далее.

Так как члены рядов, составленного на основании бинома Ньютона равны, можно сделать предварительный вывод, что и производные будут равны.

Однако, производные, полученные на основании разложения бинома Ньютона в ряд Маклорена, будут значительно отличаться от производных, полученных на основании разложения бинома Ньютона с помощью биноминальных коэффициентов. Но так и должно быть, так как ряд Тейлора и ряд Маклорена основаны на коэффициентах, являющихся производными от биноминальных коэффициентов, при условии, что предел второго замечательного предела есть число е.

4.6.2. Производные функции $\boldsymbol{E} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$ при разложении с помощью биноминальных коэффициентов.

$$(\boldsymbol{E_1})' = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{1}'} = \mathbf{0} + \frac{(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} = \frac{(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} = \frac{(-\mathbf{1})}{\mathbf{1}^{\mathbf{2}}} = -\mathbf{1}$$

$(\boldsymbol{E_2})' = \left(\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{2}}\right)' = \left(\mathbf{1} + \mathbf{2} * \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{2}}\right)' = \mathbf{0} + \mathbf{2} * \frac{(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} + \frac{(-\mathbf{2})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{3}}} = \mathbf{2} * \frac{(-\mathbf{1})}{\mathbf{2}^{\mathbf{2}}} + \frac{(-\mathbf{2})}{\mathbf{2}^{\mathbf{3}}} = -\mathbf{0,75}$

$(\boldsymbol{E_3})' = \left(\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{3}}\right)' = \left(\mathbf{1} + \mathbf{3} * \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} + \mathbf{3} * \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{3}}\right)' = \mathbf{0} + \mathbf{3} * \frac{(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} + \mathbf{3} * \frac{(-\mathbf{2})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} + \frac{(-\mathbf{3})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{4}}} = \mathbf{3} * \frac{(-\mathbf{1})}{\mathbf{3}^{\mathbf{2}}} + \mathbf{3} * \frac{(-\mathbf{2})}{\mathbf{3}^{\mathbf{2}}} + \frac{(-\mathbf{3})}{\mathbf{3}^{\mathbf{4}}} =$ **- 0,592592593**

Таким образом, при N = 1, $(\boldsymbol{E_1})' = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{1}'} = \frac{(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}}$ **;**

при N = 2, $(\boldsymbol{E_2})' = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{2}'} = \frac{(-\mathbf{2})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} * \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{1}}$ **;**

при N = 3, $(\boldsymbol{E_3})' = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{3}'} = \frac{(-\mathbf{3})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} * \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{2}}$ **;**

при N = n, $(\boldsymbol{E_3})' = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{N}'} = \frac{(-\boldsymbol{n})}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}} * \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{N}-\mathbf{1}} = \frac{(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{N}} * \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\right)^{\boldsymbol{N}-\mathbf{1}} = \frac{\left(\frac{(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{N}} * \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\right)^{\boldsymbol{N}}\right)}{\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\right)} =$

$= \frac{(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{N}+\mathbf{1}} ** \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\right)^{\boldsymbol{N}} = \frac{(-\mathbf{1})}{\boldsymbol{N}+\mathbf{1}} * \boldsymbol{E}$ **,** что соответствует общепринятой формуле производной функции по правилам дифференцирования.

Но полученные по формуле значения производной функции, не соответствуют фактическим значениям производных функции $\boldsymbol{E} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$ **.**

Фактические значения производных при **N** →∞ положительные и стремятся к нулю.

Полученные по формулам дифференцирования производные при **N** →∞ отрицательные и стремятся к нулю.

Таким образом, в любом случае производные функции второго замечательного предела не равны ни числу е, ни производным числа е.

4.6.3. Общие итоги по производным функций ряда $e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ и второго замечательного предела $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

1. Производные функций ряда $e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$\boldsymbol{E^1 - (E^1)' = \frac{1^N}{N!} = \frac{1}{N!}}$

$\boldsymbol{(E)' = \frac{N!E-1}{N!}}$.

При **N ≥ 17 ,** с большой степенью точности можно считать, что **E** = е**,**

(E)′ = е′ = е, так как разница между функцией и её производной составляет всего: $\Delta = \boldsymbol{E - (E)' = \frac{1}{N!}}$.

Однако, при ΔX → 0, как того требует само определение производной,
при ΔX ≤ 0,00000001, фактические производные (е)′перестают быть равными е:

(е)′ = **11,71828177**, вместо е = **2,718281828459050**,

(е)′/ е = **4,31091495**,

(е)′**-** е = **8,99999994**.

Но это как раз и подтверждает ранее полученное решение о том, что производная $(e^{x})'$ может принимать любые значения.

2. Производные функций второго замечательного предела $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Но полученные по формуле: $\boldsymbol{(E_N)' = \frac{(-1)}{N+1} * E_N}$ **, -** значения производной функции, не соответствуют фактическим значениям производных функции $\boldsymbol{E = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$.

Фактические значения производных при **N** → ∞ положительные и стремятся к нулю.

Полученные по формулам дифференцирования производные при **N** → ∞ отрицательные и стремятся к нулю.

Но в любом случае, при **N** → ∞**, (E$_N$)′ → 0**, то есть **(E$_N$)′≠** е.

5. Заключение.

Существует ли число e?

Да, число e - существует.

Во-первых, как предел суммы ряда: $e = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}$.

Во-вторых, как предел только некоторых чисел, то есть небольшого количества их, второго замечательного предела: $e = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$, если эти числа образованы от числа **2** возведением в степень, при значении **5,6295E+14 ≤ N ≤ 9,0072E+15** ,
$E_N = e =$ **2,718281828459050**.

При значении **N≥ 9,0072E+15**, второй замечательный предел становится равным единице.

То есть предел второго замечательного предела при $N \to \infty$ равен единице, а не числу e.

Следовательно, ни о каком тождественном схождении указанных рядов не может быть и речи.

Общепринято и в любом курсе математического анализа доказывается, что функция e^x совпадает со своей производной $(e^x)'$: $e^x = (e^x)'$.

Но решение это не однозначно, а многозначно. И фактические вычисления производных даже суммы ряда: $e = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}$ при $\Delta X \leq$ **0,00000001**, - подтверждают не общепринятое значение: $e^x = (e^x)'$, а совершенно другое: $e^x \neq (e^x)'$.

Значения производных, вычисленных на основе второго замечательного предела: $e = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$, - при $N \to \infty$, стремятся к нулю: $(E_N)' \to 0$, то есть $(E_N)' \neq e$.

Что опять подтверждает значительную разницу между рядами:
$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}$ и $\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$.

Таким образом, необходима ревизия многих разделов и приложений высшей математики, особенно, основанных на числе e.

Список использованной литературы:

1. Википедия – свободная энциклопедия. Число e. https://ru.wikipedia.org/wiki/E_(число)
2. Выгодский М.Я. «Справочник по элементарной математике». Москва, 2001 г., 416 стр.. ISBN 5-7102-0190-1.
3. Тобиас Данциг. «Числа – язык науки». Москва, Техносфера, 2008 г., 304 стр.. ISBN 978-5-94836-172-7.
4. Мир математики: Т. 25: Хоакин Наварро. «Неуловимые идеи и вечные теоремы. Великие задачи математики». Москва, 2014 г., 160 стр.. ISBN 978-5-9774-0720-5 (т. 25).
5. Письменный Д.Т. «Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Москва, Айрис-пресс, 2013, 608 стр.. ISBN 978-5-8112-4866-7.
6. Мир математики: Т. 21: Ламберто Гарсия дель Сид «Замечательные числа. Ноль, 666 и другие бестии». Москва, 2014 г., 160 стр.. ISBN 978-5-9774-0716-8(т. 21).