ПРИМЕНЕНИЕ РАСКУЛАНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Ибрагимов Р.¹, Киргизбаев Ж.¹, Парманов М.¹

¹МОИ РК «Южный Казахстанский Государственный педагогический университет», Шымкент, e-mail: OKMPI@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматриваются свойства вычисления значения, виды и алгебра раскулантов. А именно, данная работа включает в себя такие понятия как: метод применения раскулантов в решении неопределенных уравнений; проблемы использования раскулантов при решении неопределенных систем уравнений. Новые методы решения систем уравнений при помощи теории раскулантов считается научным открытием. Выявлены новые способы решения диофантовых уравнений от двух неизвестных с помощью раскулантов. Определены взаимосвязи между теорией квадратных определителей и теорией раскулантов (неквадратных определителей).

Ключевые слова: раскуланты, виды и алгебра раскулантов, вычисления значения раскулантов, метод раскулантов, решения неопределенных систем уравнений.

APPLICATION OF RASKULANTOV AT DECISION OF INDEFINITE EQUALIZATIONS AND SYSTEM OF EQUALIZATIONS

Ibragimov R.¹, Kirgizbaev J.¹, Farmanov M.¹

¹Ibragimov R., Kirgizbaev J., Farmanov M. Department of Physics and Mathematics, South Kazakhstan State Pedagogical Institute, str. Baitursynov 13, 160000, Shymkent, Kazakhstan E-mail address: OKMPI@mail.ru

Summary

This article deals with some attributes of resolution nonsquare determinations by using the theory of raskulants. In general, science project includes concepts such as: Method of using raskulants in the resolution of indefinite equations and the types of raskulant; Problems of using raskulants in order to solve the systems of equations. New methods of calculating with the raskulants theory might be considered as scientific discovery. The new methods of decision are deduced Diophantine equalization from two unknown by means of raskulants. Intercommunications are certain between the theory of square determinants and theory of raskulants (unsquare determinants).

Key words: raskulants, kinds and algebra of raskulants, calculations of value of raskulants, method of raskulants, decisions of the indefinite systems of equalizations.

Введение

Матричные модели представляют собой модели, построенные в виде таблиц (матриц). Эти модели находят широкое применение при решении плановых и экономических задач и при обработке больших массивов информации. В курсе высшей алгебры часто встречаются материалы о вычислениях значений квадратных определителей. А словосочетание "неквадратный матриц", "определителей неквадратный матриц" есть, но до сих пор не были рассмотрены вопросы нахождения их значений. Поэтому в этой статье мы впервые вводим новое понятие "раскулантов (определителей неквадратных матриц)" или значение

раскулантов(значение определителей неквадратных матриц), и покажем методы их вычислений.

Цель исследования:

- 1.Раскрыть понятие раскулантов $1 \times n$ и $m \times n$;
- 2.Выявить понятие значение раскулантов и показать методы их вычислений.
- 3.Найти общий способ решение диофантовых систем неопределенных уравнений;

Новизна исследования:

- 1.Впервые вводится новое понятие раскуланты и методы вычисления значений раскулантов $1 \times n$, $2 \times n$ и $m \times n$;
- 2.Определены взаимосвязи между теорией квадратных определителей и теорией раскулантов(неквадратных определителей).
- 3.Найдены методы вычисления значений следующих видов раскулантов 2×3 , 2×4 ,... состоящих из двух строк, трех столбцов. Способы вычисления придуманы нами так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 \\ b_1 - b_2 & b_2 - b_3 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_2 - b_3) - (b_1 - b_2)(a_2 - a_3)$$

- 4.Правила применения при решении системы неопределенных уравнений методом вычисления значений раскулантов 2×3 (состоящих из двух строк, трех столбцов), 2×4 (состоящих из двух строк, четырех столбцов)

Материал и методы исследования

При решении экономических задач применяются методы экономико-математического моделирования, использующие решение систем линейных алгебраических уравнений. Для изучения новых методов решения систем уравнений введем понятия раскулантов.

Определение. Таблица $m \times n$ чисел a_{ij} вида $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$, состоящая из m строк

и n столбцов, при $m \neq n$, называется раскулантом.

Числа a_{ij} , стоящие на пересечении i -й строки и j -го столбца, называются элементами раскуланта.

Раскуланты $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются равными, если они имеют одинаковые размеры и для каждой пары индексов выполняется равенство $a_{ij}= b_{ij}$.

В курсе алгебры решаются системы линейных уравнений с несколькими способами. Наши способы именуется под методом раскулантов. Этот метод является самым эффективным в решении системы неопределенных уравнений.

Систему m линейных уравнений с n неизвестными будем записывать в следующем виде:

В этой работе метод нахождения корней неопределенных уравнений и систем заменяется методом нахождения значений раскулантов. Закономерно встают вопросы:

1. Существует ли связь между теорией квадратных определителей и теорией раскулантов (некватратных определителей)?

2. И можно ли связать методы нахождения значений раскулантов (некватратного определителя) с методом нахождения значений квадратных определителей?

Чтобы ответить на эти вопросы мы вводим понятия следующих трех определений.

1-определение. Имеет место равенство для 3-х столбцового, 2-х строчного раскуланта (некватратного определителя) с 2-х столбцовым, 2-х строчным квадратными определителями.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (1)$$

2-определение. Имеет место равенство 4-х столбцового, 2-х строчного раскуланта (некватратного определителя) и 6-ти 2-х столбцовых, 2-х строчных квадратных определителей.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \quad (2)$$

3-определение. Имеет место равенство 5-ти столбцового, 2-х строчного раскуланта (некватратного определителя) и 10-ти 2-х столбцовых, 2-х строчных квадратных определителей.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} - \\ - \begin{vmatrix} b_1 & k_1 \\ b_2 & k_2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} c_1 & k_1 \\ c_2 & k_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & k_1 \\ d_2 & k_2 \end{vmatrix} \quad (3)$$

Теперь покажем, как мы пришли к этому выводу, т.е. результаты использования методов вычисления значений раскулантов и новый способ решения системы неопределенных уравнений.

При решении любых таких систем неопределенных уравнений, как $\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$

и $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0. \end{cases}$ не применим метод Крамера.

Мы поставили себе такой вопрос: Как в этом случае действовать? Мы словесно(совершенно случайно) ввели новые виды раскулантов 2x3 (некватратных определителей) состоящих из двух строк, трех столбцов. Мы вычисляли значения

нижеследующих раскулантов 2×3 (неквдратных определителей), различные способы вычисления придуманы нами так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 \\ b_1 - b_2 & b_2 - b_3 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_2 - b_3) - (b_1 - b_2)(a_2 - a_3);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_2 & a_2 - a_3 \\ -b_2 & b_2 - b_3 \end{vmatrix} = -a_2 b_2 + a_2 b_3 + a_2 b_2 - b_2 a_3 = a_2 b_3 - b_2 a_3;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -a_3 \end{vmatrix} = -a_1 b_3 + a_3 b_1;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 \\ b_1 - b_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

Далее нашли неизвестные (как у способа Крамера) нижеследующими формулами:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta};$$

Итак, общее решение находим с помощью нижеследующих равенств:

$$x = \Delta_x \cdot t, \quad y = \Delta_y \cdot t, \quad z = \Delta_z \cdot t.$$

Здесь $t: 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Теперь приведем решение нескольких таких систем уравнений.

Пример 1 :

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + 3y - 8z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Решите системы уравнений. Такие уравнения называются однородными. Любые однородные системы неопределенных уравнений можно решить нашими способами.

Решение:

Решим вышеприведенную систему уравнений(1) с помощью метода нахождения раскулантов (находим воспользовавшись формулой (1), значения неквдратных определителей с двумя строками, с тремя столбцами).

Вычисляем значения нижеследующих 2×3 раскулантов, состоящих из двух строк, трех столбцов :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 11, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

Тогда, можно найти частное решение $x = \frac{1}{11}$, $y = \frac{7}{11}$, $z = \frac{3}{11}$. Общее решение системы уравнений находим равенствами: $x = \Delta_x t = t$, $y = \Delta_y \cdot t = 7t$, $z = \Delta_z t = 3t$ Здесь $t: 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Пример 2.

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{Вычисляем следующие значения неквадратных определителей с двумя}$$

строками, с тремя столбцами:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 7, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -11, \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8;$$

$$x = \frac{7}{-12}, y = \frac{-11}{-12}, z = \frac{-8}{-12}.$$

$$2. \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для решения таких уравнений вычисляем нижеследующие расквалтанты.

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}, y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}, z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$t = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Приведем примеры решения следующих систем неопределенных уравнений.

Пример 3

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z + m = 0 \\ x + 2y + 4z + 5m = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$x = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10, y = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -15,$$

$$z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5, m = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Общее решение имеет вид:

$$x = 10t, \quad y = -15t, \quad z = 5t, \quad m = 0t, \quad \text{где } t\text{-любое число.}$$

Пример 4
$$\begin{cases} 3x + y + 4z + 5m = 0 \\ 5x + 2y + 6z + 3m = 0 \end{cases}$$

Решите системы уравнений. Решение:

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -13, \quad y = -\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10, \quad m = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -1.$$

Общее решение: $x = -13t, \quad y = 4t, \quad z = 10t, \quad m = -t$. где t -любое число.

Пример 5
$$\begin{cases} 3x + 2y + z - k = 3 \\ x - 4y + 2z + 3k = -16 \\ 2x - y - 3z - 2k = 11 \end{cases}$$

Решите системы уравнений.

Решение: Вычисляем нижеследующих раскулантов $x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -15$

$$y = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -30, \quad z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 42, \quad k = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -63$$

Общее решение: $x = -15t, \quad y = -30t, \quad z = 42t, \quad k = -63t$, где t -любое число.

Выводы

Мы анализируя разные способы и методы решения однородных неопределенных систем уравнений пришли к такому мнению:

1. Для решения любого однородного
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \dots + a_{n1}x_n = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \dots + a_{n2}x_n = 0 \end{cases}$$

системы неопределенных уравнений можно использовать раскуланты состоящие из 2 строк и n столбцов. Из этого исходит то, что в любом случае можно решить систему уравнений состоящую из n – неизвестных, m – уравнений, с помощью раскулантов типа n строк и n столбцов.

2. Для решения любого неоднородного

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 = b_2 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 = b_3 \end{cases} \quad \text{системы}$$

неопределенных уравнений также используем раскванты состоящие из 3 строк и n столбцов.

Список литературы

1. Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах. -Москва: «Наука», 1974. стр. 17-24.
2. Боревич З.И. Определители и матрицы. – М.: «Наука», 1970.
3. Оразбаев М. Теория определителей. -Алматы: «Мектеп», 1970. .
4. Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., -М., 1972.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры . -Москва: Наука, 1975.
6. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов.-М.: Наука.1984.-416с.
7. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. -Москва: , 1974.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г.. Линейная алгебра.-М.:Наука, 1974.
9. Кострикин А.И.,Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия.-М.:Изд-во Моск. Ун-та,1980.-320с.,10ил.
10. Минк Х. Перманенты. -М.: Мир,1982.-211с.